И.И. Поспелова

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

Москва
2006

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

И.И. Поспелова

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Москва
2006

УДК 519.83
ББК 22.18

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова

Р е ц е н з е н т ы:
профессор А.А. Васин
профессор А.А. Шананин

Поспелова И.И.
Динамические модели макроэкономики: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001 г.), 2006. – 168 с.
ISBN 5-89407-290-5

Учебное пособие включает основную часть одноименного годового курса лекций, читающегося на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова для магистров 1-го года обучения по программе «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности». В учебном пособии содержится изложение базовых понятий и подходов классической теории математической экономики и современной концепции построения макроэкономических моделей – системного анализа развивающейся экономики, а также описание основных принципов информационной технологии поддержки математического моделирования.

УДК 519.83
ББК 22.18

ISBN 5-89407-290-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие написано на основе читаемых автором курсов лекций «Динамические модели макроэкономики» для слушателей магистратуры факультета ВМиК МГУ и «Математическое моделирование экономического поведения» для студентов 6-го курса МФТИ. Изложение, в основном, опирается на материал книг [2, 27, 28, 32, 33]. Помимо материала этих работ в лекционных курсах также рассматриваются основы экономической теории в части определения основных статистических макроэкономических показателей и кредитно-денежной политики, которые в данном пособии не приводятся. Необходимые сведения по этим вопросам можно почерпнуть в книгах [18, 36]. Для создания целостной картины подходов к моделированию экономических систем доказательства некоторых утверждений и теорем сознательно опущены или выделены виде упражнений, подробное изложение пропущенных доказательств можно найти в книгах и учебниках [2, 10, 14, 19, 25].

Учебное пособие состоит из введения и пяти глав. Во введении обсуждаются общие проблемы математического моделирования экономики, а также объясняется базовое понятие экономического агента. Первая глава посвящена описанию поведения экономических агентов потребителя и производителя. Описание поведения потребителя излагается в рамках неоклассической теории спроса. Для описания производственных процессов предлагаются статические подходы к построению производственных функций и линейные многоотраслевые модели. Во второй главе рассматриваются динамические модели производственных процессов: производственные функции, учитывающие изменение со временем факторов производства, и линейные динамические модели производства.

В третьей главе изучаются основные подходы к описанию взаимодействий экономических агентов, к которым относятся модели общего равновесия и динамические модели роста. Четвертая глава посвящена основам системного анализа развивающейся экономики – современного подхода к моделированию экономических систем, разработанного в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН коллективом ученых под руководством академика РАН А.А. Петрова. В пятой главе излагаются основные принципы организации информационной системы поддержки математического моделирования экономики, применяемой для построения и исследования математических моделей реальных экономических систем.

В конце учебного пособия приводится глоссарий, содержащий определения используемых понятий экономической теории, экономико-математического моделирования и математического аппарата.

Учебное пособие предназначено для студентов, слушателей магистратуры и аспирантов, обучающихся по специальности прикладной математики, также оно может быть полезно всем, кто интересуется математической экономикой и хочет получить общее представление о применении математических моделей в экономических исследованиях и о современных подходах к вопросам математического моделирования экономики. Для успешного усвоения материала данного пособия читателю требуется наличие знаний в области математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории оптимизации, теории игр, исследования операций и оптимального управления в объеме соответствующих курсов высших учебных заведений.

Учебное пособие подготовлено и издано при поддержке образовательной программы «Формирования системы инновационного обучения в МГУ», а также при поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ-9344.2006.1 и НШ-5379.2006.1).

ВВЕДЕНИЕ

Все вопросы, так или иначе связанные с экономическими проблемами, традиционно вызывают повышенный интерес. Он возникает как у отдельных людей и предприятий, которые хотят иметь представление о том, что будет завтра и как нужно действовать сегодня, чтобы завтра получить доход, прибыль, выгоду или не потерять сбережения, так и у различных государственных структур, которым важно знать направление развитие экономики страны для разработки эффективной экономической политики с целью разумного планирования государственных финансов и повышения общего благосостояния населения. Кроме того, в последнее время все более остро ощущаются глобальные проблемы эффективного использования энергоресурсов и загрязнения окружающей среды, поэтому у специалистов различных областей возникают вопросы определения общих тенденций развития всей мировой экономики.

Для решения подобных проблем важным является предсказание будущего развития экономической ситуации в городе, стране, регионе или мире. При этом интерес вызывает как выяснение долгосрочного прогноза изменения экономики в целом, так и краткосрочные прогнозы развития конкретных ситуаций, например, на финансовых рынках или фондовых биржах. Естественно, что любые прогнозы должны быть обоснованными. Популярные издания регулярно публикуют мнения экономических экспертов относительно изменения той или иной ситуации. Однако подавляющее большинство таких прогнозов, даже если исключить их ангажированность, основывается на не всегда понятной логике. В ее основе лежат, как правило, эмпирически установленные экономические законы и качественные зависимости, в совокупности образующие экономическую теорию.

Надо сказать, что очень многие принимают решения о своей финансовой деятельности на основе подобных прогнозов. Однако в таких действиях есть один существенный недостаток – не всегда неизвестно, из каких точно соображений исходят эксперты, поэтому невозможно ни оценить точность прогнозов, ни просчитать последствия различных вариантов собственных действий.

Желание принимать экономические решения на основе обоснованных и точных прогнозов, а также потребности в точных количественных оценках изменения экономических показателей функционирования экономики породили проникновение математических методов в экономическую науку, что привело к развитию отдельной теории – математической экономики, целью которой является разработка методов и математических моделей, описывающих экономические процессы и явления. Потребность в построении математических моделей объясняется еще и тем, что в экономической системе (в отличие от физической) невозможно поставить эксперимент, например, для того, чтобы оценить последствия тех или иных экономических решений.

Поскольку единственным созданным человечеством аппаратом, представляющим строго логически обоснованные результаты, является чистая математика, то вполне естественно в решении жизненных вопросов исходить из строгих математических суждений. Это касается не только экономики, но и всего комплекса наук о жизни. Именно по этой причине огромный интерес во всем мире среди ученых различных специальностей вызывают вопросы построения математических моделей наблюдаемых процессов и явлений. Однако в любой области построение адекватной математической модели – очень сложная задача [26]. Главная ее трудность в том, чтобы перевести на язык формул, функций и уравнений интересующие исследователя процессы и явления правильно – так, чтобы по математическому описанию можно было бы судить о действительности и строить адекватный качественный и количественный прогноз будущего развития. Для этого необходимо не только владение математическим аппаратом и достаточными знаниями в области математики, но и глубокое понимание природы изучаемых процессов и явлений. Поэтому мы начнем с того, что попытаемся понять, что такое экономика, какие экономические процессы можно описать языком формул, как оценивать результат, который дает математическая модель, что можно учесть в математической модели, а что нельзя.

Что такое экономика?

Экономика относится к тем общеизвестным и часто употребляемым понятиям, которые известны большинству, но при этом строго определить это понятие могут далеко не все. Кроме того, смысл этого слова сильно зависит от контекста – может быть экономика предприятия и экономика страны, рыночная экономика и политическая экономия, существуют экономические отношения, экономические показатели и экономическая теория. Все эти понятия объединяет одно – они, так или иначе, относятся к хозяйственной деятельности (производству, потреблению, сбережению, продаже, покупке каких-либо благ) отдельных лиц, предприятий или групп лиц и групп предприятий.

Само слово экономика происходит от греческого слова οικονομικά (oikonomike), буквально означающего «искусство ведения домашнего хозяйства». Оно представляет собой сочетание двух греческих слов «хозяйство» и «закон», так что в изначальном смысле экономику следовало бы трактовать как хозяйство, ведущееся в соответствии с законами, правилами, нормами. При этом надо помнить, что хозяйство в Древней Греции было в основном натуральным, домашним, так что экономика того периода мыслилась не как народное хозяйство страны, а скорее как домоводство. Позже вопросы хозяйствования рассматривались уже не только в рамках семьи, но и города (по-гречески город – «полис», отсюда возникло понятие «политическая экономия»), а затем крупного региона, страны, мира. В дальнейшем термин «политическая экономия» был вытеснен термином «экономика» (economics). В настоящее время слово экономика используется в следующих значениях:

1) совокупность общественных отношений в сфере производства, обмена и распределения продукции;

2) народное хозяйство данной страны или его часть, включающая определенные отрасли и виды производства; состояние хозяйства, структура и финансово-материальное состояние какой-либо области хозяйственной деятельности;

3) экономическая наука, изучающая ту или иную отрасль хозяйства региона (экономика промышленности, экономика торговли и др.), т.е. раздел научной дисциплины, изучающий функциональные или отраслевые аспекты экономических отношений.

Таким образом, исследование вопросов экономики означает изучение существующих экономических отношений в рамках отрасли, страны или отдельных экономических субъектов. При этом разделяют два уровня детализации такого изучения – микроэкономический и макроэкономический. ***Микроэкономикой*** называют раздел экономической науки, исследующий экономику на уровне обособленных экономических единиц (отрасль, фирма, домохозяйство и т. п.), а также конкретные рынки, цены, товары, услуги. К ***макроэкономике*** относится раздел экономической науки, исследующий экономику как целое, а также ее важнейшие составляющие (бизнес, государственный сектор и т. п.).

Теперь обсудим, какие цели может преследовать и какие задачи может решать математическая модель экономики.

Моделирование экономики

Для понимания места математических моделей в экономических исследованиях, прежде всего, необходимо уточнить, что мы будем понимать под термином модель. Термин модель широко распространен как в научном, так и в общеупотребительном языке, причем в разных ситуациях в него вкладывается различный смысл. Слово модель ведет свое происхождение от латинского modulus, что значит мера, мерило, образец, норма. Сейчас под словом модель в широком понимании имеется в виду либо некий образ (в том числе условный или мысленный) объекта, либо наоборот, прообраз некоторого объекта или системы объектов. Таким образом, в обычном, общеупотребительном языке термин модель используется в двух основных, прямо противоположных смыслах, причем имеется целый спектр всевозможных промежуточных способов употребления этого слова, что делает практически неразрешимой задачу строгого определения слова модель.

Ограничение использования понятия модель только в науке не упрощает ситуацию. В математике существует теория моделей, в которой под моделью понимается произвольное множество с заданным на нем набором свойств и отношений. Тут не приходится говорить о роли модели как прообраза чего-либо или искать объект, отражением которого она является, поскольку это множество обычно используется для исследования противоречивости некоторой умозрительно построенной системы аксиом. В естественных науках моделями называют некоторые вспомогательные объекты исследования, применяющиеся для анализа исходных основных объектов. Таким образом, даже в круге наук, связанных с использованием математики, нельзя дать общее определение понятия модель.

Выход из создавшегося положения может быть найден, если ограничиться понимаем термина модель, которое используется в широко распространенном методе исследования, называемом ***моделированием***. Под моделированием понимается исследование объектов познания не непосредственно (т.е. не путем эксперимента над самими объектами), а косвенным путем, при помощи анализа некоторых других вспомогательных объектов. Таким вспомогательные объекты мы и будем называть моделями.

Сразу после определения понятий моделирование и модель возникает первый вопрос, связанный с методом моделирования: на основе чего мы имеем право по свойствам моделей судить о свойствах интересующих нас объектов? Одной фразой ответить на этот вопрос нельзя. В каждом отдельном исследовании необходимо четко понимать, на чем основана уверенность в возможности перенесения полученных в исследовании результатов с модели на объект.

Второй вопрос, возникающий при изучении данного нами определения модели: а зачем нужно использовать какие-то вспомогательные объекты и затем сталкиваться со сложнейшей проблемой возможности переноса результатов исследования на объект вместо того, чтобы исследовать интересующий объект непосредственно? Здесь, прежде всего, существует причина практическая: модели выбираются таким образом, чтобы они были значительно проще для исследования, чем интересующие объекты. Кроме того, некоторые объекты вообще не удается исследовать активно. Невозможно, например, ставить на экономике страны эксперимент, имеющий чисто познавательное значение. Однако моделирование имеет и другое, более важное для науки значение: поскольку в модели воспроизводятся лишь некоторые наиболее важные в данном исследовании стороны исходного объекта, моделирование позволяет выявить существенные факторы, ответственные за те или иные свойства изучаемых объектов.

Для того чтобы правильно оценить состояние и перспективы применения математических моделей в экономических исследованиях, полезно сопоставить их развитие с опытом применения математического моделирования в физике, где этот метод возник, получил свое развитие и откуда он начал проникать в другие области.

На протяжении столетий физика с успехом использует математические модели – как для познания мира, так и для прогнозирования результатов воздействия на него. Более того, прогресс самой математики в значительной степени обусловлен исследованием физических моделей. Такие направления современной математики как теория дифференциальных уравнений, теория групп, топология и функциональный анализ тесно связаны с проблемами, возникающими в классической или квантовой механике, термодинамике и т.д.

Совместная активная деятельность многих поколений физиков и математиков привела к относительно стройной системе математических моделей физических процессов. В ее основе лежат принципы, служащие основой моделей физических явлений. Эти принципы являются продуктом долгого развития науки, в них воплощен опыт воздействия человека на окружающую его природу, т.е. практики, важное место в которой в естественных науках занимает натурный эксперимент. Развитость моделирования физических процессов выражается в том, что исследователи достаточно хорошо понимают, когда и какую модель им выбрать, где лежат границы применимости различных моделей, на какие вопросы эти модели могут отвечать и для решения каких задач они не пригодны.

Развитие системы математических моделей физических явлений происходит в основном в двух направлениях. Если в исследовании встречается ситуация, для которой не удается подобрать подходящую модель среди уже существующих, то пытаются получить нужную модель логическим путем из уже существующих моделей. Обычно это сделать удается, в этом и состоит зрелость современной физики. Если все же это сделать не удается, то приходится опираться непосредственно на эксперимент, выводить некоторые экспериментальные обобщения и строить модель на их основе. Такой подход к построению моделей называется ***феноменологическим***.

Современная система математических моделей физических явлений обладает следующим свойствами: она основана на небольшом числе хорошо проверенных принципов; модели связаны между собой логическими или феноменологическими переходами; исследователи умеют выбирать нужные им модели в соответствии со стоящими передними задачами; развитие системы моделей идет путем логической надстройки, феноменологических расширений и углубления ее фундаментальных основ.

Проанализировав состояние и этапы развития моделирования физических явлений, можно сказать, что в настоящее время человечество обладает глубоким познанием методологии применения математики в естественных науках.

В гуманитарных науках (экономике, социологии, психологии) целенаправленное использование достижений математики только начинается. Лишь в XX веке появились разделы математики, ведущие свое происхождение от проблем гуманитарных наук. Наиболее известный из них – теория игр. Мы сейчас находимся в начале систематического проникновения математических методов в гуманитарные науки, и, вероятно, здесь повторится многое из того, что произошло при формировании методологии современной физики.

Попытаемся сравнить описанное положение дел в области физики с состоянием экономико-математических исследований. Хотя математические модели используются широко при анализе экономических проблем, нельзя сказать, что уже построена система математических моделей экономических процессов.

Дело в том, что экономическое моделирование существенно сложнее физического. В первую очередь, причина этого в том, что экономика охватывает не только производственные процессы, но и производственные отношения. Моделирование производственных процессов не представляет принципиальных трудностей и не намного сложнее, чем моделирование физических процессов. Моделировать же производственные отношения невозможно, не учитывая поведения людей, их интересов и индивидуально принятых решений.

Во всех экономических системах можно выделить два основных уровня экономических процессов.

Первый уровень – производственно-технологический. К нему относится описание производственных возможностей экономических систем. При математическом моделировании экономической системы ее обычно разбивают на отдельные, элементарные в данной модели, производственные единицы. После этого необходимо описать, во-первых, производственные возможности каждой из единиц, и, во-вторых, возможности обмена ресурсами производства и продукцией между элементарными производственными единицами.

На уровне социально-экономических процессов определяется, каким образом реализуются производственные возможности, описанные на производственно-технологическом уровне экономической системы. Обычно технологические возможности только задают некоторые ограничения, но сами по себе не определяют полностью развития экономического процесса, поскольку существует огромное число вариантов выполнения производственных заданий, укладывающихся в технологические ограничения. В математических моделях выделяют специальные переменные, значения которых позволяют определить единственный вариант развития экономического процесса. Эти переменные называют управляющими воздействиями или ***управлениями***. На уровне социально-экономических процессов определяется механизм выбора управляющих воздействий.

Таким образом, для описания функционирования экономической системы необходимо смоделировать оба уровня: производственно-технологический и социально-экономический.

Существует, правда, отдельная группа экономических проблем, в которых описание социально-экономического уровня не является необходимым. Это так называемые нормативные проблемы, в которых необходимо указать, как следует задать управления, чтобы достичь наилучших в каком-то смысле результатов. При этом необходимо точно определить, что понимается под наилучшим результатом, т.е. сформулировать критерий, по которому можно оценивать и сравнивать различные управления. Критерий (целевой функционал) определяется как функция переменных модели изучаемой системы и обычно предполагается единственными. Такая постановка приводит к задаче оптимизации или оптимального управления, в которой требуется найти такое управление, чтобы критерий достигал максимального или минимального значения.

Однако все же основную трудность представляет необходимость описывать ***экономические отношения*** различных субъектов экономики. Отношения любых субъектов складываются из действий самих субъектов и взаимодействий между различными субъектами. Для описания действий субъектов экономики, в основном, используются подходы классической теории математической экономики, которая объединяет результаты попыток описать мотивацию деятельности субъектов экономики. Описание взаимодействий экономических субъектов опирается, как правило, на предложенную Л. Вальрасом теорию общего равновесия, в рамках которой учитывается специфика экономических отношений, сложившихся в моделируемой ситуации. При этом экономические отношения могут быть описаны как на микро-, так и на макроуровне. Выбор уровня детализации модели определяется нуждами и целями построения модели.

Построение любой модели подразумевает упрощенное описание ситуации, процесса или поведения. Это, с одной стороны, означает, что в исследуемой ситуации необходимо выделить факторы, которые будут учтены в модели, и факторы, которые обоснованно игнорируются при построении модели. С другой стороны, такой подход естественным образом приводит к тому, что в любой модели возникают границы ее применимости – ограничения на использование и интерпретацию результатов моделирования.

Таким образом, можно сделать вывод, что процесс построения модели должен включать в себя как исследование моделируемой системы, так и определение того, как поведение системы может и должно быть описано языком математики. Во всем процессе построения модели экономики выделим следующие этапы:

1) в соответствии с нуждами исследования необходимо определить уровень детализации экономического описания, т.е. выяснить, будет модель описывать микро- или макроэкономические процессы и явления;

2) выявить характерные особенности изучаемой ситуации, поняв, что является определяющим для поведения системы, а что – второстепенным; выяснить наличие каких-либо эмпирических зависимостей и устойчивых характеристик и взаимоотношений, особенностей поведения, а также определить показатели функционирования системы;

3) понять, какой математический аппарат подходит для описания системы и изучаемой ситуации, и формализовать, переведя на язык математики, действия и взаимодействия субъектов экономики, а также показатели, описывающие состояние экономической системы;

4) определить границы применимости получившейся модели;

5) выполнить решение возникших математических задач, сравнить полученные результаты с действительностью, построить прогноз развития системы или оценить значения показателей функционирования системы в какой-то конкретной ситуации.

Примерно так выглядит общая схема построения модели практически любой, не только экономической системы. Ясно, что рассмотреть все возникающие в таком сложном процессе варианты невозможно, поэтому далее мы ограничим процесс построения модели экономики:

1) мы будем рассматривать экономику в целом, изучая в основном, особенности построения макроэкономической модели;

2) исследования особенностей конкретных экономических ситуаций и отношений, а также выявление эмпирических зависимостей между экономическими показателями мы проводить не будем. Этот вопрос является сложным, он требует не только экономических и математических знаний, но и опыта, интуиции и практики. При построении модели мы будем опираться на основные статистические макроэкономические показатели функционирования экономики и будем использовать зависимости, эмпирически установленные классической экономической теорией;

3) поскольку мы рассматриваем экономику в целом, то естественным является изучение ее динамики, т.е. изменения во времени показателей функционирования экономики. Мы будем использовать аппарат математического анализа для описания зависимостей с помощью функций, дифференциальное исчисление для описания изменения показателей, оптимизацию и оптимальное управление для описания выбора одного из возможных и допустимых решений;

4) мы будем считать неизменными сложившиеся устойчивые экономические отношения. Это означает, что мы не будем учитывать структурные изменения, которые могут происходить в экономике вследствие политических решений, сильного изменения существующих технологий и кардинального изменения общемировой экономической ситуации, которые приводят к существенному изменению сложившихся экономических связей. Таким образом, рассматриваемые модели макроэкономики могут быть использованы и могут быть адекватными на таком проме-

жутке времени, когда влияние перечисленных факторов отсутствует или несущественно;

5) для математических задач, возникающих в процессе построения моделей, мы будем проводить полноценные исследования или будем указывать направление их исследования.

Субъекты экономики: роли и экономические агенты

С макроэкономической точки зрения процесс функционирования экономики отражает результат совместных действий всех участвующих в экономических отношениях лиц, фирм, предприятий, руководящих и контролирующих органов. Естественно, что описать всех участников экономических отношений в модели практически невозможно. Например, население Российской Федерации составляет около 140 млн. человек, каждый из которых прямо или косвенно участвует в экономических отношениях, покупая продовольственные товары, одежду, автомобили, работая на предприятиях и в государственных учреждениях, делая вклады в банки и беря кредиты; число предприятий, зарегистрированных на территории Российской Федерации, составляет примерно 4 млн., каждое из которых производит или продает один или несколько видов товаров, оказывает услуги, берет кредиты на развитие производства, выплачивает заработную плату и налоги, покупает сырье для производства, строит здания или арендует помещения; Российская Федерация разделена на почти 100 субъектов федерации и федеральных округов, руководство каждого из которых принимает законы, постановления и распределяет имеющиеся финансовые средства; есть федеральное правительство и Центральный банк, которые также участвуют в экономических отношениях. Ясно, что такое множество участников экономических отношений невозможно не только описать, но и просто перечислить.

Каждый из участников экономической системы может выполнять различные функции в разные периоды времени – сегодня человек работает, получая заработную плату и тратя ее на собственные нужды, завтра он становится собственником предприятия и принимает решения о том, что и в каком количестве нужно производить, продавать и покупать, послезавтра он выходит на пенсию и тратит получаемую от государства пенсию и накопленные им средства опять же на собственные нужды, которые изменились по сравнению с теми, которые были, когда он был работником предприятия. Но в то же время с экономической точки зрения персонификация субъектов экономической деятельности не требуется, поэтому экономические отношения можно представить в виде системы обезличенных функций или ***ролей***, которые просто кем-либо должны быть исполнены. Другими словами, обеспечение воспроизводства условий существования общества определяется наличием определенного набора «исполнителей» таких ролей. Тогда в описанном примере можно сказать, что один человек в разные периоды времени исполняет роли рабочего, предпринимателя и пенсионера и от того, что эти же роли будут исполнены другим человеком, экономические отношения не изменятся.

Таким образом, анализируя экономические отношения, необходимо, в первую очередь, определить требуемые для их существования роли. Заметим, что роль определяется только по наличию у субъекта экономики действий или решений, каким-либо образом влияющих на эти экономические отношения. У разных субъектов могут быть одинаковые роли, но каждый субъект должен принимать решение в соответствии со своей ролью.

После того, как определены роли, первый вопрос, на которой необходимо ответить при построении модели экономики, состоит в том, как описать языком математики процедуру принятия решения субъектом экономики. Здесь мы воспользуемся принципами, специально разрабатывавшимися для описания экономических отношений и в итоге превратившимися в отдельную область знаний, названную теорией игр[1] [6, 21, 23, 24].

Согласно общему теоретико-игровому подходу для описания процедуры принятия решения некоторым субъектом (необязательно экономическим) необходимо указать:

1) множество допустимых действий субъекта (в терминах теории игр – стратегии поведения);

2) интересы, цели субъекта, критерии оценки стратегий – целевые функции, функции выигрыша;

---

[1] Более общий подход к описанию процессов выбора и принятию решений предоставляет теория исследования операций [7] .

3) информацию о состоянии и действиях других субъектов.

Попытаемся в такой форме описать принятие решений субъектом экономики в контексте построения модели и с учетом особенностей экономической системы:

1) множество действий (стратегий поведения) субъекта экономики полностью определяется его ролью и должно быть сформировано на основе анализа возможностей субъекта в рамках данной роли. Здесь также необходимо исключить или учесть каким-либо специальным образом действия субъекта, соответствующие не описываемым в модели процессам;

2) в классической теории игр цели игроков считаются заданными и, как правило, не обсуждаются. В экономике цель субъекта не может быть определена произвольно – она должна соответствовать исполняемой им роли. В противном случае роль просто не будет исполнена. При разработке модели соответствующие роли цели обычно просто постулируются с учетом специфики сложившихся экономических отношений (максимизация прибыли производителями, достижение плановых показателей) и результатов эмпирических исследований (существование функции полезности у больших групп потребителей). Общепринятым является подход, основанный на том, что экономические субъекты принимают решение, руководствуясь принципом рационального поведения (действуют в некотором смысле наилучшим для себя образом в сложившихся условиях);

3) в теории игр основное внимание уделяется зависимости выбора субъекта от объема и качества доступной информации, а также момента ее поступления. При этом получение субъектом дополнительной информации всегда оказывается выгодно [21, 22]. В экономике основной трудностью является избыток потенциально доступной субъекту информации. Поэтому при построении модели формируется общая система показателей, достаточно полно характеризующая экономическую конъюнктуру, после чего из этих показателей для каждого субъекта выбираются влияющие на его решение.

Типизированный субъект экономики, интересы и информированность которого соответствуют исполняемой им роли, будем называть ***экономическим агентом,*** или просто ***агентом***. Агентом может быть как юридическое лицо (предприятие, банк, фирма, министерство финансов), так и физическое (человек или группа людей). Такая формализация позволяет представить экономические отношения как результат согласованных действий и взаимодействий экономических агентов. В свою очередь, это означает, что описание экономической системы следует начать с выделения экономических агентов, деятельность и отношения которых определяют структуру изучаемой экономики и ее эволюцию.

Основываясь на упомянутом теоретико-игровом подходе, решение агента должно быть описано как рациональный (оптимальный) выбор значений некоторых переменных из множества допустимых значений, т.е. как решение некоторой задачи оптимизации. Ограничения на допустимые значения переменных делятся по своему происхождению на два типа: внутренние (технологические) и внешние (институциональные). Внутренние ограничения возникают за счет особенностей исполнения агентом его роли. Например, производитель осуществляет выбор технологии, основываясь на доступных ему средствах производства. Внешние ограничения являются следствием взаимодействий агента с другими агентами или окружающей средой. Примером таких ограничений служит бюджетное ограничение, задающее доступные агенту денежные средства, которые он получает от других агентов.

Доступная агенту информация описывается с помощью специальных информационных переменных, к которым, как правило, относятся различные показатели экономической конъюнктуры. Информационные переменные играют согласующую роль в моделях экономики – от них зависит выбор всех агентов и, в конечном счете, они должны быть определены так, чтобы действия различных агентов оказались согласованными.

Теперь перейдем к изучению вопросов определения основных составляющих процесса построения макроэкономической модели, к которым относятся описание действий агентов и описание их взаимодействий.

Глава 1. ОПИСАНИЕ ДЕЙСТВИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Equation Section (Next)В качестве экономических агентов выделяют такие экономические структуры, которые участвуют в основных экономических отношениях – производство, потребление, торговлю, государственное управление и т.п. Заметим, что выделение экономических агентов, т.е. типизация экономических субъектов, не решает проблемы их большого числа: в экономике действуют одновременно сотни тысяч производителей, миллионы посредников и сотни миллионы потребителей. В модели каждого из таких агентов можно представить не более чем в десятках, максимум – в сотнях экземпляров. Кроме того, коллектив взаимодействующих агентов в целом будет функционировать не так, так отдельные агенты. Поэтому возникает проблема обобщенного, или ***агрегированного***, описания экономических агентов. Она состоит в том, чтобы образовать из большого числа микроагентов некоторое относительно небольшое число макроагентов. В каждом конкретном случае построения макроэкономической модели проблема агрегирования микроагентов решается поразному. В общем случае эта задача остается нерешенной.

Модельный макроагент представляет собой некоторую экономическую макроструктуру, образованную субъектами со сходными ролями. Взаимодействие субъектов внутри структуры при этом не учитывается, а рассматривается поведение всей структуры в целом, которое, как оказывается, почти всегда можно представить в виде решения некоторой задачи оптимизации.

Определение макроагентов оказывается вполне оправданным еще и потому, что в экономике существуют априори выделенные особые агенты, такие как Центральный банк, правительство, министерство финансов, естественные монополии и т.п. Деятельность таких агентов необходимо учитывать при построении макроэкономической модели, но в то же время их выбор в общем случае нельзя задать никаким принципом оптимальности. В подобных случаях описание действий агента задается в виде программы, состоящей и набора инструкций, выполнение которых зависит от сложившейся ситуации.

Итак, мы будем полагать, что состояние и изменение экономики определяется результатом действий некоторого набора макроагентов. В зависимости от особенностей моделируемой ситуации этот набор может быть разным, и способы описания одинаковых агентов в разных макроэкономических моделях также могут различаться – универсального набора экономических агентов не существует.

В этой главе мы приведем несколько типичных подходов к описанию основных экономических агентов – потребителя и производителя. Выделение этих агентов обусловлено тем, что традиционно в математической экономике разделяют процесс потребления благ и их производства. Такое разделение объясняется тем, что эти процессы, по сути, разные. При описании производственных процессов существенно учесть технологические особенности производства, т.е. внутренние (технологические) ограничения. При описании потребления необходимо учитывать не то, как благо было произведено, а то, что и в каком количестве потребитель может и хочет приобрести, т.е. внешние (бюджетные) ограничения и ценность благ для потребителя.

1.1 Теория потребления

В макроэкономической модели агент «потребитель» обычно объединяет всю совокупность домашних хозяйств экономики, к основным функциям которых относится потребление произведенных экономикой благ, предоставление трудовых ресурсов производителям благ, получение доходов в виде заработной платы и от участия в прибыли предприятий, уплата налогов в государственный бюджет, получение потребительских кредитов, предоставление средств коммерческим банкам в виде депозитов и получение соответствующего процента по вкладам, получение доходов от государства в форме пенсий и пособий. Вообще говоря, перечисленные функции могут быть разделены между несколькими группами потребителей, сформированными по какому-либо признаку (например, по территориальному или по уровню доходов). Однако такую сложную ситуацию мы рассматривать не будем.

Главной отличительной особенностью агента-потребителя является то, что он не влияет явным образом на производственные процессы.

Основу описания поведения потребителя предоставляет теория спроса, сформировавшаяся в конце XIX века в результате развития теории полезности. Основным постулатом теории полезности является то, что все блага с точки зрения их потребителя приносят удовлетворение, т.е. обладают некоторой полезностью, и каждый потребитель стремится к получению наибольшей полезности. Теория спроса ставит задачу несколько шире – определить решение потребителя с точки зрения рационального распределения им личного бюджета. И теория спроса, и теория полезности, вообще говоря, разрабатывались с целью описать поведение отдельного потребителя. Однако как показали исследования [35], удовлетворительные практические результаты можно получить только для достаточно больших групп потребителей, рассматривающихся как единая макроструктура. По этой причине, как классическая теория спроса, так и полученные на ее основе современные результаты [37] с успехом используются именно в макроэкономических моделях. Изложим основные положения современной теории спроса.

Будем считать, что в экономике обращается n товаров, потенциально доступных потребителю. Назовем $\mathbb{R}^n_+$ ***пространством товаров***, вектор $x=(x_1,...,x_n)$ которого представляет определенный ассортиментный набор товаров. Пусть X – множество товаров, на котором определены интересы потребителя (например, это может быть множество всех потенциально доступных потребителю товаров и пригодных для него). Будем считать, что любые два вектора $x,y\in X$ потребитель может сравнить и сделать из них выбор. Математически возможность сравнивать элементы некоторого множества означает наличие определенного на этом множестве бинарного отношения [16].

Пусть на множестве X задано бинарное отношение $\succeq$, называемое отношением ***предпочтения***, обладающее свойствами:

- рефлексивности: $x\succeq x$ для любого $x\in X$;
- транзитивности: из того, что $x\succeq y$ и $y\succeq z$ следует, что $x\succeq z$;

- связности (полноты): для любых $x, y \in X$ либо $x \succeq y$, либо $y \succeq x$, либо и то, и другое одновременно (в случае, когда $x \succeq y$, а $y \succeq x$ не выполнено, будем использовать обозначение $x \succ y$).

Помимо перечисленных свойств дополнительно потребуем непрерывности и ненасыщаемости отношения предпочтения.

Определение. Отношение предпочтения $\succeq$ называется непрерывным на множестве X, если множество $\{(x, y) \mid x \succ y\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$.

Содержательно свойство непрерывности отношения предпочтения означает, что если набор товаров x строго предпочтительнее набора товаров y, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение предпочтения между ними сохранится.

Определение. Точкой насыщения (максимальным элементом в X по отношению предпочтения $\succeq$) называется такой элемент $x \in X$, что $x \succeq y$ для всех $y \in X$. Если X не содержит точки насыщения, то говорят, что имеет место ненасыщаемость.

Наличие точки насыщения в множестве товаров X означает существование наиболее предпочтительного для потребителя набора товаров в этом множестве.

Основным свойством непрерывного отношения предпочтения является возможность его описания с помощью числовой функции $u: X \to \mathbb{R}^1$, которая называется ***функцией полезности***. Она приписывает каждому набору товаров некоторое число – его полезность для потребителя.

Определение. Функция $u(x)$, определенная на множестве X, называется функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения $\succeq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$.

На языке функции полезности ненасыщаемость означает, что функция полезности $u(x)$ не достигает своего супремума на X.

Теорема (Дебре). Если множество X связно, а отношение предпочтения непрерывно, то существует функция полезности, соответствующая этому отношению предпочтения.

Упражнение 1. Доказать, что для отношения предпочтения, определяемого лексикографическим порядком, не существует функции полезности.

Нетрудно видеть, что если для некоторого отношения предпочтения определена соответствующая ему функция полезности $u(x)$, то функция $f(u(x))$, где $f(\cdot)$ строго монотонно возрастает, также будет функцией полезности, соответствующей данному отношению предпочтения. Таким образом, если для отношения предпочтения существует хотя бы одна функция полезности, то их существует бесконечно много.

Далее будем предполагать, что потребитель наделен некоторой функцией полезности[2] $u(x)$, в соответствии с которой он осуществляет выбор набора товаров из всех доступных ему наборов товаров. Относительно функции полезности $u(x)$ примем, что она:

1) определена на $X = \mathbb{R}_+^n$;
2) дважды дифференцируема;
3) строго вогнута, причем ее матрица Гессе отрицательно определена при всех значениях x;
4) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$, $i = 1,...,n$;
5) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$, $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,...,n$.

Типичный вид функции полезности, удовлетворяющей условиям 1)-5), изображен на рис. 1а.

Предположим, что возможности выбора потребителем наборов товаров из множества X ограничены некоторым ***бюджетом*** $K > 0$, и что потребитель действует рационально (наилучшим для себя образом в условиях имеющегося у него бюджета). Будем

[2] Использование такой функции очень удобно, хотя вопрос о ее существовании и построении на практике является до конца не решенным. Основной проблемой при построении функции полезности является практически наблюдаемое отсутствие транзитивности предпочтений отдельного потребителя.

считать, что каждый товар имеет цену, и обозначим через $p \in \mathbb{R}_+^n$ вектор цен на товары.

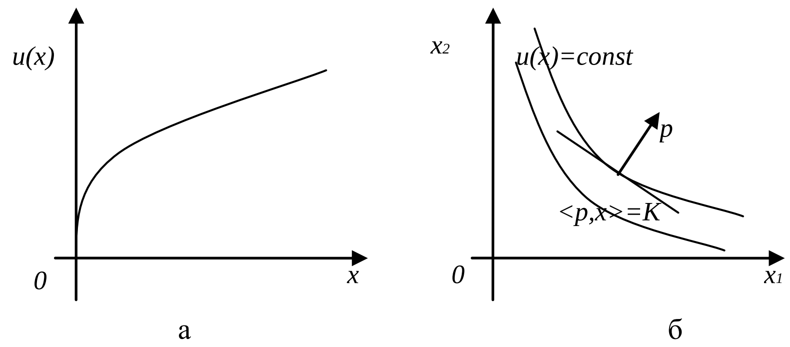

Рис. 1

В описанных условиях гипотеза о рациональном поведении потребителя математически выражается в стремлении к максимизации функции полезности при бюджетном ограничении. Таким образом, мы приходим к следующей задаче математического программирования [37]:

$$\max_{x \in X} u(x)$$
$$\langle p, x \rangle \le K, \quad x \ge 0. \qquad (1.1)$$

Вообще говоря, потребитель не обязан тратить весь свой бюджет на приобретение товаров. Однако в силу строгого монотонного возрастания функции полезности и ее ненасыщаемости максимум полезности может достигаться только на границе допустимого множества, поэтому в задаче (1.1) неравенство можно заменить равенством. Заметим, что конечное решение задачи потребителя существует только при $p > 0$ (если цена на один из товаров равна 0, то потребитель может приобрести этого товара сколь угодно много, не нарушая при этом ограничений бюджета).

В указанных выше условиях 1)-5) относительно максимизируемой функции полезности для любых заданных $p > 0$ и $K > 0$ существует единственное решение задачи (1.1), которое может быть найдено из системы необходимых условий оптимальности (в данном случае они являются и достаточными):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i,\ i = 1,...,n \\
&\langle p, x \rangle = K
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

на вектор x и множитель Лагранжа λ к бюджетному ограничению. Это решение определяет однозначную положительную функцию спроса потребителя $x^*(p,K)$ – зависимость объемов приобретаемых товаров от цен на них и капитала потребителя.

На рис. 1б изображен графический смысл решения задачи потребителя (1.1): точка максимума функции полезности при бюджетном ограничении определяется как точка касания линии уровня функции полезности и прямой, отвечающей бюджетному ограничению.

Упражнение 2. Показать, что система (1.2) *определяет единственную однозначную положительную функцию спроса* $x^*(p,K)$.

В общем случае, когда функция полезности не является вогнутой, решение задачи потребителя (1.1) неоднозначно, т.е. может существовать множество наборов товаров, одинаково предпочтительных для потребителя при заданных бюджетных ограничениях.

Пусть цены $p \in \mathbb{R}_+^n$ на товары фиксированы, заданы функция полезности $u(x)$ и капитал потребителя $K(p)$. Тогда множество

$$
\tilde{X}(p) = \{ x \mid x \in X,\ \langle x, p \rangle \le K(p) \} \tag{1.3}
$$

задает множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p.

Определение. Многозначное отображение

$$
\Phi(p) = \begin{cases} x,\ u(x) = \max\limits_{y \in \tilde{X}(p)} u(y),\ \textit{если}\ u(x) < \infty, \\ \varnothing,\ \textit{иначе} \end{cases} \tag{1.4}
$$

называется функцией спроса.

Основная трудность при построении функции спроса по заданной функции полезности состоит в том, что множество $\tilde{X}(p)$ может быть неограниченно, а тогда максимум в (1.4) может не существовать. Например, если цена какого-либо товара равна 0, то соответствующая координата вектора $x \in \tilde{X}(p)$ может быть сколь угодно большой, и тогда в силу ненасыщаемости функции полезности ее максимум в таком случае не достигается.

Одним из способов преодоления описанной трудности является введение дополнительных ограничений. В частности, можно считать, что множество X, на котором определена функция полезности, обладает следующим свойством: если в последовательности векторов $\{x^k\} \in X$ для j-й координаты $x_j^k \to \infty$, то все остальные координаты векторов последовательности также стремятся к бесконечности. Это свойство обеспечивает ограниченность множества $\tilde{X}(p)$ для любого $p \neq 0$, откуда в свою очередь следует, что функция спроса $\Phi(p)$ определена на всем множестве $p \in \mathbb{R}_+^n$, $p \neq 0$.

При описании потребительских предпочтений естественным является требование их независимости от масштаба цен, что обеспечивается следующим условием на функцию дохода:

$K(\lambda p) = \lambda K(p)$ для любого $\lambda \geq 0$.

Выполнение этого условия означает, что функция дохода является однородной первой степени (линейно-однородной).

Определение. Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется однородной степени $r > 0$ относительно аргументов $x_1,....,x_n$, если $f(\alpha x_1,...,\alpha x_n) \equiv \alpha^r f(x_1,...,x_n)$ для любого $\alpha \geq 0$.

В том случае, когда функция дохода линейно-однородна, для отображений $\tilde{X}(p)$ и $\Phi(p)$ выполнено:

$$\tilde{X}(\lambda p) = \tilde{X}(p),\ \Phi(\lambda p) = \Phi(p).$$

Таким образом, выбор потребителя зависит только от соотношения цен, а не от значений компонентов вектора цен.

Теперь можно считать, что поведение потребителя описывается функцией спроса $\Phi(p)$, а окончательный выбор потребителя состоит в указании вектора $x \in \Phi(p)$.

При практическом построении моделей экономики относительно отображения $\Phi(p)$ обычно делают дополнительные упрощающие предположения. Например, считают, что отображение $\Phi(p)$ однозначно (для этого достаточно потребовать строгой вогнутости функции полезности $u(x)$). Кроме того, если потребитель ненасыщаем, то он тратит весь свой капитал, т.е. для любого вектора цен $p \geq 0$ и любого вектора $x \in \Phi(p)$ имеет место равенство $\langle x, p \rangle = K(p)$.

Несмотря на упомянутую выше сложность определения функции полезности, соответствующей реальным потребительским предпочтениям, теория спроса предоставляет широкие возможности для применения при практическом построении моделей экономики [29]. Во-первых, можно использовать не функцию полезности, а непосредственно функцию спроса, которую проще определить на основе статистических данных [34]. Во-вторых, по известной функции спроса можно попытаться найти соответствующую ей функцию полезности. При определенных предположениях о структуре спроса и в условиях сохранения экономической стабильности это сделать удается [39].

Изложенная теория спроса определяет выбор потребителя статически – в некоторый фиксированный момент времени. Для завершения изложения подхода к описанию поведения потребителя остается выяснить, каким образом следует учитывать возможные изменения во времени потребительских предпочтений. Здесь есть два пути: явно задавать каким-либо образом функцию спроса в зависимости от цен и бюджета потребителя, которые, меняясь во времени, меняют и спрос, либо учесть зависимость от времени при определении критерия рациональности выбора и решать соответствующую задачу оптимизации. Во втором случае, как правило, оценка степени удовлетворенности потребительских предпочтений производится интегрально на всем рассматриваемом промежутке функционирования экономики, т.е. функционалом вида

$$\int_{t_0}^{T} u(t) e^{-\delta t} dt, \tag{1.5}$$

где t_0 – начальный момент функционирования экономической системы, T – конечный момент (вообще говоря, T может быть равно ∞), $u(t)$ оценивает полезность потребления (например, среднее потребление на душу населения) в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$, дисконтирующий множитель $e^{-\delta t}$ соизмеряет полезности потребления в разные моменты времени.

1.2 Статические модели производства

В экономических моделях агент «производитель» осуществляет выполнение следующих функций: выбор технологии производства товаров и услуг, наем рабочей силы и выплата заработной платы работникам, направление средств в развитие производства, приобретение ресурсов для производства, получение кредитов и соответствующая уплата процентов, выплата дивидендов собственникам предприятий, уплата налогов. Главной отличительной особенностью производителя является отсутствие конечного потребления.

Основную сложность при описании производителя представляет необходимость учета технологических особенностей производственных процессов. Мотивация производителя при выборе той или иной технологии производства обычно описывается его стремлением к получению наибольшей прибыли. Запись самого выражения для прибыли, как правило, трудностей не вызывает (хотя решить получающуюся задачу оптимизации на максимум прибыли может быть непросто).

Пусть в экономической системе обращается некоторый набор экономических благ, которые для краткости мы будем называть ***товарами***. В каждом производственном процессе в соответствии с имеющейся технологией осуществляется преобразование одного набора товаров в некоторый другой набор. Первый набор обычно называют ***производственными затратами*** или ***факторами производства***, а второй – ***выпуском*** или ***объемом производства***. Товары, производимые в экономической системе, принято называть ***продуктами***. Товары, используемые в процессе производства, но не выпускаемые производственной системой, – ***ресурсами***. Вообще говоря, производственные затраты принято разделять по времени их использования: продукты и ресурсы, полностью расходующиеся в течение одного производственного цикла (сырье, электроэнергия), составляют ***текущие затраты***, а использующиеся в течении нескольких производственных циклов (здания, оборудование) – ***капитальные***. Однако мы сначала рассмотрим статические модели производства, в которых такое разделение производственных затрат не производится.

Пусть в экономике обращается n товаров. Тогда каждый производитель может быть отождествлен с некоторым производственным процессом (x, y), где $x \in \mathbb{R}^n_+$ – вектор производственных затрат, $y = F(x)$ – объем производства, многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ определяет технологию преобразования продуктов и ресурсов в другие продукты, задавая таким образом ***технологическое множество***

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n_+, y = F(x)\} . \tag{1.6}$$

Хотя технологическое множеств полностью характеризует производственный процесс, его использование практически в самом общем виде для описания поведения производителя весьма затруднительно. В любой экономике действует огромное множество предприятий, и даже если задачу построения технологического множества удастся решить для групп технологически связанных предприятий, последующее определение результата их совместной деятельности окажется невозможным. По этой причине при описании производства в макроэкономических моделях делают различные упрощения. Главное из них состоит в том, что отображение F считают однозначным. Далее, в зависимости от потребности детализации описания производственного сектора в модели, рассматривают либо максимально агрегированное производство, либо разделенное на отрасли. В первом случае предполагается, что агент-производитель осуществляет выпуск всего валового внутреннего продукта (ВВП). Тогда выпуск $y \in \mathbb{R}^1_+$, а в качестве отображения F выбирают какую-либо, как правило, нелинейную зависимость объема ВВП от некоторого набора факторов производства. Во втором случае вектор выпуска не является одномерным, а учет межотраслевого взаимодействия осуществляется в предположении о линейности отображения F .

1.2.1 Производственная функция

В неоклассической теории производства технологии и производственные возможности производителя (или совокупности производителей) описываются ***производственной функцией***.

Она определяет зависимость объема производства от количества затрачиваемых факторов производства. Пусть $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$ – вектор затрат производственных ресурсов, $y=(y_1,...,y_m)\in\mathbb{R}_+^m$ – вектор выпуска, отражающий результат производства при определенных затратах. Назовем производственной функцией некоторого производственного процесса отображение $f:D\to U$, $D\subseteq\mathbb{R}_+^n$, $U\subseteq\mathbb{R}_+^m$, моделирующее выпуск продукции в рассматриваемом процессе.

Наличие множеств D и U обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для производственного процесса происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. При этом может оказаться, что удобная аналитическая форма производственной функции дает хорошие результаты только в пределах некоторых множеств значений затрат и выпусков.

Как было сказано выше, на практике часто рассматривают случай $m=1$, т.е. предполагается наличие единственной оценки результатов производства[3]. В таком случае производственная функция определяет выпуск $y=f(x_1,...,x_n)$.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации рассмотрим производственную функцию $Y=F(K,L)$, в соответствии с которой выпуск Y осуществляется с использованием только двух факторов производства: основных производственных фондов K и трудовых ресурсов L. Единицы измерения факторов производства и самого объема производства здесь существенной роли не играют[4] – объем основных фондов и объем производства могут быть как в стоимостном, так и в натуральном выражении, объем использования затрат труда выражается какой-либо числовой характеристикой (числом работающих, числом человеко-часов и т.п.)

---

[3] Это условие не ограничивает общности: наличие нескольких производимых товаров можно выразить введением нескольких производственных функций.

[4] Согласование размерности может быть легко выполнено введением соответствующего размерного множителя в функцию F.

Самая простая функция такого вида, которую мы будем использовать для примеров, – это функция Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad A, \alpha, \beta > 0, \qquad \alpha + \beta = 1. \qquad (1.7)$$

Обычно на производственную функцию накладывают требование гладкости и следующие условия:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \qquad (1.8)$$

Условия на производные первого порядка означают увеличение объема производства при увеличении одного из факторов производства и неизменности другого. Условия на производные второго порядка отражают уменьшение предельной отдачи факторов производства при увеличении их количества[5].

Основными экономико-математическими характеристиками производственной функции являются:

- средняя производительность труда $y = Y/L$, обратная величина $\lambda = L/Y$ носит название трудоемкости производства;
- средняя фондоотдача $z = Y/K$;
- фондовооруженность труда $k = K/L$.

Наряду со средними показателями используются и предельные характеристики:

- предельная производительность труда $v = \partial F/\partial L$,
- предельная фондоотдача $r = \partial F/\partial K$.

Также важную роль при исследовании производственных функций играют ***коэффициенты эластичности***. Они характеризуют процент прироста выпуска при увеличении затрат ресурса на 1%.

Коэффициент эластичности по основным фондам равен $\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$, а по труду $\frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$. Легко видеть, что коэффициенты α и β в функции Кобба-Дугласа (1.7) как раз и являются коэффициентами эластичности по основным фондам и труду, соответственно.

---

[5] Эта зависимость, вообще говоря, является эмпирическим фактом и справедлива только в определенных условиях.

На производственную функцию часто накладывают требование однородности:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L) \text{ для } \lambda > 0 .$$

Степень однородности $\gamma > 0$ характеризует эффективность расширения масштаба производства. Чаще всего используются линейно-однородные производственные функции (с $\gamma = 1$).

При изучении свойств линейно-однородных функций естественно перейти к новым переменным: фондовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$ и средней производительности труда $y = \dfrac{Y}{L}$. Тогда $y = f(k) = F\left(\dfrac{K}{L}, 1\right)$.

В новых переменных:

- предельная производительность труда $v = f - kf'$,
- предельная фондоотдача $r = f'$,
- коэффициент эластичности по фондам $\alpha = kf'/f$,
- коэффициент эластичности по труду $\beta = 1 - kf'/f$.

Упражнение 3. Доказать, что если хотя бы один из коэффициентов эластичности по ресурсам не зависит от k*, то производственная функция является функцией Кобба-Дугласа.*

Определение. Линейно-однородная производственная функция $f(k)$, удовлетворяющая условиям:

$$f' > 0, \qquad f'' < 0, \qquad f(0) = 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \infty, \qquad \lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0, \tag{1.9}$$

называется неоклассической.

Существенной особенностью реальных производственных процессов является возможность частичного или полного замещения одного производственного фактора другим. Обычной ситуацией является, к примеру, использование более дешевого труда рабочих вместо вложения средств в механизацию или автоматизацию производства. Возможность замещения характеризует производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска.

Предельной нормой замещения трудовых ресурсов основными фондами называется величина $s_K = -\dfrac{dK}{dL} = \dfrac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}$. Аналогично определяется и s_L – предельная норма замещения основных фондов трудовыми ресурсами. Ясно, что $s_L s_K = 1$.

Для однородной производственной функции степени однородности $\gamma > 0$

$$s_K = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k. \tag{1.10}$$

Как нетрудно видеть, для функции Кобба-Дугласа $s_K = \dfrac{\beta}{\alpha} k$.

Для однородных производственных функций можно также определить показатель эластичности замещения. При изменении k на 1% значение нормы замещения s_k меняется на $\dfrac{ds_k}{dk}\dfrac{k}{s_k}$ процентов. Следовательно, для того, чтобы добиться изменения нормы замещения на 1%, необходимо заменить величину фондовооруженности на $\left(\dfrac{ds_k}{dk}\dfrac{k}{s_k}\right)^{-1}$ процентов. Эта величина называется ***эластичностью замещения*** σ_k:

$$\sigma_K^{-1} = \frac{ds_k}{dk}\frac{k}{s_k}, \quad \sigma_K = -\frac{\gamma f'(f - kf')}{k((1-\gamma)(f')^2 + ff'')}.$$

Для функции Кобба-Дугласа эластичность замещения постоянна и равна 1.

Аналогично можно получить выражение для σ_L. Нетрудно проверить, что $\sigma_K = \sigma_L$, поэтому далее мы будем употреблять для эластичности замещения обозначение σ.

По характеру показателя эластичности различают два класса производственных функций:

- VES – функции с переменной эластичностью замещения (Variable Elasticity of Substitution),
- CES – функции с постоянной эластичностью замещения (Constant Elasticity of Substitution).

Класс функций с постоянной эластичностью замещения допускает простое описание – для определения общего вида такой функции достаточно решить уравнение $\frac{dk}{ds}\frac{s}{k}=\sigma$. Непосредственно из этого уравнения [41] имеем $s=Ck^{1/\sigma}$. С учетом (1.10)

$$\frac{f'}{f}=\frac{\gamma}{s+k}=\frac{\gamma}{Ck^{1/\sigma}+k}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем, что $f=C_1(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}$. Переходя к переменным K и L, получим:

$$Y=F(K,L)=A(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}},$$

где $\rho=\frac{1-\sigma}{\sigma}>-1$, $A>0$, $0<\gamma\le 1$. Эта форма записи является общепринятым видом производственных функций класса CES.

Упражнение 4. Какие производственные функции получатся при решении уравнения $\frac{dk}{ds}\frac{s}{k}=\sigma$ *для* $\sigma=1$ *и* $\sigma=0$ *?*

Описание производственного процесса с помощью производственной функции априори постулирует наличие некоторой функциональной зависимости между объемом затрат ресурсов, необходимых для производства, и объемом произведенной продукции. Естественно, что возникает справедливый вопрос о том, действительно ли существуют такие зависимости, которые еще должны обладать определенными свойствами. Попытаемся определить связь макроэкономической производственной функции с реальными производственными процессами, происходящими на миркоуровне.

1.2.2 Модель Хаутеккера-Йохансена

Рассмотрим множество агентов производителей P. Предположим, что агент $a\in P$ производит набор продуктов x^a, $x^a\in\mathbb{R}_+^n$. Разделим затраты производителя a на затраты продуктов $v^a\in\mathbb{R}_+^n$ и ресурсов l^a. Для простоты рассмотрим случай единственного ресурса, под которым будем понимать труд. Заметим, что если производитель затрачивает в процессе производства часть того товара, который он же и производит (например, электростанция тратит производимую ей электроэнергию на освещение станции, а тепло – на отопление помещений станции), то большого смысла рассматривать по отдельности такие затраты и выпуск нет. По этой причине часто рассматривают так называемый чистый продукт – разность $y^a = x^a - v^a$. Стоимость чистого продукта агента определяет вклад этого агента в общий объем производства:

$$Y = \sum_{a \in P} y^a .$$

Будем считать, что производственные возможности агента a задаются в зависимости от объема используемых ресурсов функцией $f^a(l)$.

Объем производства любого предприятия ограничен в соответствии с имеющимся оборудованием. Величина максимального размера выпуска, допускаемого имеющимся оборудованием, называется ***производственной мощностью***:

$$m^a = \max_l f^a(l) .$$

Будем считать фиксированной величину трудоемкости производства каждого агента λ^a. Тогда функцию $f^a(l)$ можно заменить кусочно-линейной функцией

$$\varphi^a(l) = \begin{cases} \dfrac{l}{\lambda^a}, & l \le \lambda^a m^a, \\ m^a, & l > \lambda^a m^a. \end{cases} \tag{1.11}$$

Изобразив на плоскости для всей совокупности производителей значения λ^a и m^a, получим ***распределение производственных мощностей по технологиям***, которое характеризует производственную базу хозяйства в некоторый фиксированный момент времени (см. рис. 2).

Возможности всей системы агентов-производителей, работающих в рамках одной экономики, естественно характеризовать решением задачи об оптимальном распределении ресурса между этими агентами [4, 22]. Мы рассматриваем статическую задачу, поэтому распределение мощностей по технологиям считается заданным и фиксированным.

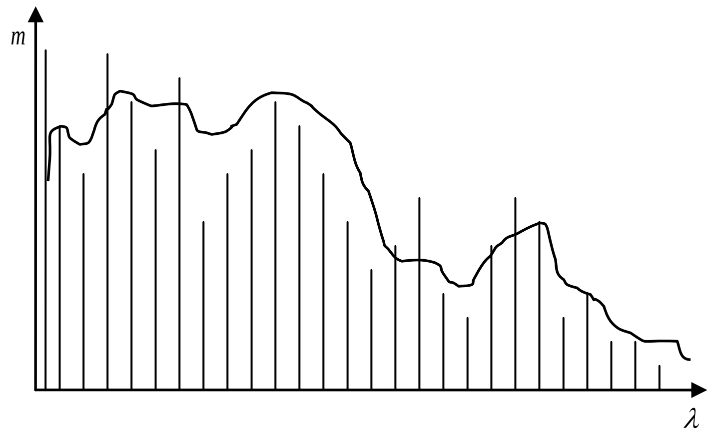

Рис.2

Пусть экономика располагает суммарным объемом ресурса L, который необходимо распределить между агентами производителями, определив части l^a так, чтобы

$$\sum_{a \in P} l^a \le L \,, \tag{1.12}$$

и при этом достигался максимум суммарного выпуска

$$Y = \sum_{a \in P} y^a \quad .$$

В силу приближения (1.11) выпуск y^a не может превосходить мощности:

$$y^a \le m^a \tag{1.13}$$

и требует определенного обеспечения ресурсами:

$$\lambda^a y^a \le l^a \,. \tag{1.14}$$

Максимальное значение суммарного выпуска, выраженное как функция общего объема ресурсов, при заданном распределении мощностей по технологиям

$$Y = F(L) = \max_{y^a, l^a \geq 0} \sum_{a \in P} y^a \quad \text{при ограничениях (1.12)-(1.14)} \qquad (1.15)$$

называется ***моделью производства Хаутеккера-Йохансена***.

Задача (1.15) является задачей линейного программирования. Однако для ее эквивалентной формулировки:

$$\max_{l^a} \sum_{a \in P} \min\left[m^a, \frac{l^a}{\lambda^a}\right], \ \sum_{a \in P} l^a \leq L,$$

решение может быть легко получено с помощью принципа уравнивания Гермейера [7]. Занумеруем производителей в порядке возрастания трудоемкости λ^a. Тогда первый производитель получит ресурс $l^1 = \lambda^1 m^1$ и внесет в суммарный выпуск вклад m^1. Второй производитель получит ресурс $l^2 = \lambda^2 m^2$ и добавит к выпуску m^2. Так будет продолжаться до тех пор, пока не кончится ресурс[6], т.е. до такого производителя $b \in P$, трудоемкость производства которого λ^b удовлетворяет условию

$$\sum_{a:\lambda^a < \lambda^b} \lambda^a m^a < L \leq \sum_{a:\lambda^a \leq \lambda^b} \lambda^a m^a \ . \qquad (1.16)$$

То, на каком именно производителе закончится ресурс, зависит от объема этого ресурса, поэтому можно считать, что $\lambda^b = \xi(L)$.

При оптимальном распределении ресурса производители с трудоемкостью $\lambda^a < \xi(L)$ будут работать на полную мощность, а производители с трудоемкостью $\lambda^a > \xi(L)$ выпускать продукт не будут. «Пограничный» производитель b будет использовать часть ресурса $L - \sum_{a:\lambda^a < \xi(L)} \lambda^a m^a$, которого в общем случае не хватит для работы этого производителя на полную мощность. В результате совокупный выпуск составит

$$F(L) = \sum_{a:\lambda^a < \xi(L)} m^a + y^b, \text{ где } y^b = \frac{L - \sum_{a:\lambda^a < \xi(L)} \lambda^a m^a}{\lambda^b}.$$

---

[6] Если все производители будут обеспечены ресурсом, то все они будут работать на полную мощность. В таком случае задача имеет тривиальное решение.

Хотя мы получили достаточно просто решение дискретной задачи оптимизации, ясно, что использовать его для анализа производственного сектора не очень удобно. Кроме того, при наличии большого числа близких по своим технологическим характеристикам производителей величина недоиспользованной мощности окажется несущественной. По этим причинам мы аппроксимируем распределение мощностей по технологиям неотрицательной функцией плотности $m(\lambda)$. Она показана на рис. 2 непрерывной кривой. Аппроксимация должна быть такой, что для не слишком малых интервалов Λ шкалы трудоемкостей выполнялось приближенное равенство

$$\sum_{a:\lambda^a \in \Lambda} m^a \approx \int_{\Lambda} m(\lambda) d\lambda . \tag{1.17}$$

Для простоты мы будем предполагать, что плотность $m(\lambda)$ непрерывна и строго положительна, начиная с некоторого неотрицательного $\bar{\lambda}$.

Переход к непрерывной плотности распределения мощностей $m(\lambda)$ означает, что мощности сплошь заполняют шкалу трудоемкости. Суммы при этом превращаются в интегралы, неравенство (1.16) становится равенством:

$$L = \int_0^{\xi} \lambda m(\lambda) d\lambda , \tag{1.18}$$

а совокупный выпуск определяется выражением

$$F(L) = \int_0^{\xi} m(\lambda) d\lambda . \tag{1.19}$$

В силу непрерывности плотности распределения мощностей $m(\lambda)$ уравнение (1.18) на величину ξ имеет единственное решение [11] $\xi(L) \in (\bar{\lambda}, \infty)$ при $L \in (0, \bar{L})$, где $\bar{L} = \int_0^{\infty} \lambda m(\lambda) d\lambda$ – полное число рабочих мест.

Если $\bar{L} < \infty$ и $L > \bar{L}$, то ресурсы окажутся избыточными, и все мощности будут работать.

Таким образом, совокупный выпуск:

$$F(L)=\begin{cases}\int\limits_0^{\xi} m(\lambda)\,d\lambda\,,\ \xi:\ L=\int\limits_0^{\xi}\lambda\, m(\lambda)\,d\lambda\,, & L<\bar{L},\\ M=\int\limits_0^{\infty} m(\lambda)\,d\lambda\,, & L\ge\bar{L}.\end{cases} \tag{1.20}$$

При $L\in\left(0,\bar{L}\right)$ функция $F(L)$ является:

1) неотрицательной;
2) гладкой (по теореме о неявной функции [11]);
3) строго монотонной, поскольку

$$F'(L)=\frac{dF}{dL}=\frac{d\int\limits_0^{\xi} m(\lambda)d\lambda}{d\int\limits_0^{\xi}\lambda m(\lambda)d\lambda}=\frac{m(\xi)d\xi}{\xi m(\xi)d\xi}=\frac{1}{\xi}>0\,, \tag{1.21}$$

4) строго вогнутой, поскольку

$$F''(L)=\frac{dF'}{dL}=\frac{d\xi^{-1}}{d\int\limits_0^{\xi}\lambda m(\lambda)d\lambda}=\frac{-\xi^{-2}d\xi}{\xi m(\xi)d\xi}=-\frac{1}{\xi^3 m(\xi)}<0 \tag{1.22}$$

5) обладает свойством $\lim\limits_{L\to\infty}\frac{F(L)}{L}=0$.

Заметим, что получившаяся функция $F(L)$ удовлетворяет условиям (1.8), накладываемым на производственную функцию, которую мы определили в п. 1.2.1. Эти два описания являются эквивалентными. Действительно, для любой функции, обладающей свойствами 1)-4) уравнение (1.21) определяет единственную непрерывную монотонную функцию $L(\xi)$, подставляя которую в (1.22), можно получить выражение для соответствующего распределения мощности $m(\xi)$. Таким образом, любую производственную функцию можно представить в виде (1.20) с помощью некоторого эффективного распределения мощностей.

Упражнение 5. Определить плотность $m(\xi)$ для производственной функции $F(L) = A\left(\frac{L}{\bar{L}}\right)^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

Преимущество представления производственных возможностей эффективным распределением мощностей проявляется при определении производственных возможностей объединения двух производственных систем. Пусть две производителя, характеризующиеся производственными функциями $F_1(L)$ и $F_2(L)$, объединяются. Тогда производственные возможности объединенной системы составляют

$$F_{12}(\hat{L}) = \max_{\substack{L_1, L_2 \geq 0 \\ L_1 + L_2 = \hat{L}}} \left\{ F_1(L_1) + F_2(L_2) \right\}, \tag{1.23}$$

а не сумму $F_1(L) + F_2(L)$, поскольку производственные функции не являются аддитивными.

Покажем, что аддитивной характеристикой производственных систем служит эффективное распределение мощностей по технологиям. Рассмотрим случай гладких, строго монотонных и строго вогнутых производственных функций $F_1(L)$ и $F_2(L)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям:

$$\lim_{L \to 0} F_i'(L) = \infty, \ \lim_{L \to \infty} F_i'(L) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Выполнение этих условий обеспечивает отсутствие максимума (1.23) в точке $L_1 = L_2 = 0$. Тогда значение максимума в (1.23) согласно теореме Куна-Таккера [37] совпадает со значением максимума функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(L_1, L_2, \mu) = F_1(L_1) + F_2(L_2) + \mu(\hat{L} - L_1 - L_2).$$

Представим производственные функции F_1 и F_2 эффективным распределением соответствующих мощностей $m_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$:

$$F_1(L_1) = \int_0^{\xi_1} m_1(\lambda) d\lambda, \ L_1 = \int_0^{\xi_1} \lambda m_1(\lambda) d\lambda,$$

$$F_2(L_2) = \int_0^{\xi_2} m_2(\lambda) d\lambda, \ L_2 = \int_0^{\xi_2} \lambda m_2(\lambda) d\lambda.$$

Теперь учтем в задаче поиска максимума функции Лагранжа это представление. Заметим, что максимизация будет производиться по новым переменным ξ_1 и ξ_2:

$$\mathcal{L}(\xi_1,\xi_2,\mu)=\int_0^{\xi_1} m_1(\lambda)d\lambda+\int_0^{\xi_2} m_2(\lambda)d\lambda+$$

$$+\mu\left(\hat{L}-\int_0^{\xi_1}\lambda m_1(\lambda)d\lambda-\int_0^{\xi_2}\lambda m_2(\lambda)d\lambda\right).$$

Вычисляя производные по ξ_1 и ξ_2 и приравнивая их к 0,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_i}=m_i(\xi_i)-\mu\xi_i m_i(\xi_i)=0\,,\ i=1,2\,,$$

с учетом строгой положительности плотности эффективных распределений, получаем, что $\xi_i=1/\mu$, $i=1,2$.

Значение максимума в (1.23) определяется равенством

$$F_{12}(\hat{L})=\int_0^{\xi_1} m_1(\lambda)d\lambda+\int_0^{\xi_2} m_1(\lambda)d\lambda=\int_0^{1/\mu}(m_1(\lambda)+m_2(\lambda))\,,$$

где множитель Лагранжа определяется из условия

$$\hat{L}=\int_0^{\xi_1}\lambda m_1(\lambda)d\lambda+\int_0^{\xi_2}\lambda m_2(\lambda)d\lambda=\int_0^{1/\mu}\lambda(m_1(\lambda)+m_2(\lambda))d\lambda\,.$$

Таким образом, сумма плотностей $m_1(\lambda)+m_2(\lambda)$, отвечающих производственным функциям F_1, F_2, будет плотностью, порождающей производственную мощность объединения двух производственных единиц.

Свойство аддитивности распределений, которое верно и для негладких производственных функций, позволяет отойти от прямого сопоставления агента-производителя его мощности. Можно считать, что производитель имеет в своем распоряжении набор производственных мощностей, или, что то же самое, характеризуется не кусочно-линейной производственной функцией φ^a вида (1.11), а вогнутой функцией $f^a(l)$ общего вида. Совокупное распределение мощностей будет тогда просто суммой эффективных распределений, отвечающих производственным функциям отдельных агентов:

$$m(\lambda)=\sum_{a\in P} m^a(\lambda)\,,\quad f^a(l)=\int_0^{\xi} m^a(\lambda)\,d\lambda\,,\; l=\int_0^{\xi} \lambda\, m^a(\lambda)\,d\lambda\,.$$

Если распределения $m^a(\lambda)$ достаточно «размазаны», то при оптимальном распределении ресурса L между агентами не будет неработающих агентов. Просто у агентов будет не полностью загружены их суммарные производственные мощности $M^a=\int_0^{\infty} m^a(\lambda)\,d\lambda$. Загрузка будет определяться так, что предельная производительность $\partial f^a(l)/\partial l = 1/\xi$ у всех агентов будет одинаковой.

Теперь обратимся к вопросу о соотношении эффективного распределения мощностей и микроэкономических данных о технических характеристиках различных предприятий. Если мы рассмотрим группу предприятий одной отрасли, выпускающих достаточно однородную продукцию, то различные технологии замещают друг друга при различном соотношении цен на факторы производства. Как было показано Л.Йохансеном [44], в таком случае эмпирические данные о загрузке мощностей и данные о технических характеристиках предприятий согласуются с описанной моделью.

В том случае, когда речь идет о производстве валового внутреннего продукта, ситуация иная. ВВП создается различными отраслями, технологии производства в которых дополняют друг друга. В то же время трудоемкости производства в различных отраслях существенно отличаются. Поэтому при построении совокупного распределения мощностей по технологии подобная картина, скорее всего, не получится. Однако практика показывает, что совокупный объем производства достаточно точно может быть описан с помощью производственной функции, которая, как мы знаем, отождествляется с некоторой плотностью распределения мощности. Такую «агрегированную» плотность, видимо, следует толковать как совокупность производственных мощностей, соответствующих различным предприятиям различных отраслей, образующим технологическую цепочку.

1.2.3 Линейные модели производства

Теперь мы обратимся ко второму варианту описания производственных процессов, а именно, будем считать, что производство в экономике разделено между несколькими отраслями, каждая из которых в своем производстве затрачивает продукцию других отраслей. Относительно структуры производства сделаем одно существенно предположение: будем считать отрасли чистыми. Это означает, что каждая из отраслей выпускает однородный продукт. Для описания такой структуры производства обычно предполагается, что технологическое множество (1.6) порождается линейным отображением.

1.2.3.1 Модель Леонтьева

Будем считать, что весь производственный сектор экономики разделен на n чистых отраслей. В процессе производства каждая отрасль выпускает продукт только одного типа, и разные отрасли выпускают разные продукты. При производстве своего вида продукта отрасль нуждается в продукции других отраслей. Предположим, что в некоторый момент времени T_0 составлен балансовый отчет по всей экономике за некоторый промежуток времени (например, год) по следующей форме:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \ldots & \bar{a}_{1n} & \bar{c}_1 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{c}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \ldots & \bar{a}_{nn} & \bar{c}_n \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \ldots & \bar{v}_n & \end{array} . \tag{1.24}$$

Здесь числа от 1 до n – номера отраслей, $\bar{a}_{ij}$ – объем продукции отрасли с номером i, израсходованной отраслью j в процессе производства за отчетный период, $\bar{v}_j$ – общий объем продукции (валовой выпуск) j–й отрасли, $\bar{c}_j$ – объем продукции j–й отрасли, который был израсходован на конечное потребление (непроизводственные нужды, накопление и возмещение выбытия основных фондов).

Величины $\overline{a}_{ij}$ показывают распределение продукции i–й отрасли по другим отраслям и конечному потреблению:

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} + \overline{c}_i = \overline{v}_i \,,\ i = \overline{1,n} \,.$$

Если все столбцы матрицы (1.24) разделить на $\overline{v}_j$, то получится матрица, характеризующая структуру производства и технологии в каждой отрасли. В таком случае величины $a_{ij} = \dfrac{\overline{a}_{ij}}{\overline{v}_j}$ называются ***коэффициентами прямых затрат***.

Матрица, составленная из коэффициентов прямых затрат, несет информацию о технологической структуре производства – по ее изменению можно проследить развитие технологий. Примем следующие условия:

1) сложившаяся технология производства неизменна в течении некоторого промежутка времени $[T_0, T_1]$;
2) существующие технологии линейны, т.е. для выпуска продукции в объеме x_j необходимо и достаточно произвести затраты в объемах $x_j a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, всех отраслей. Этот факт был обнаружен В.Леонтьевым в 20-е годы XX века в результате анализа обширного статистического материала. Точнее говоря, он выяснил, что изменение коэффициентов прямых затрат происходит гораздо медленнее, чем изменение элементов матрицы (1.24).

В таком случае технологическое множество (1.6) порождается отображением $F(x) = \{ y \mid yA \le x,\ y \ge 0 \}$, где матрица $A = (a_{ij})$ описывает технологию единичной интенсивности работы всех отраслей. Обозначим через $x = (x_1, ..., x_n)$ вектор выпусков (интенсивностей). При такой интенсивности на производственные нужды расходуется продукция отраслей в количестве Ax. Тогда на конечное потребление остается $c = x - Ax$.

Основной вопрос, возникающий в описанной ситуации, состоит, однако, не в том, чтобы определить, что останется на конечное производство, а в том, какой должна быть интенсивность производства, чтобы обеспечить заданный уровень потребления. Таким образом, нужно найти решение системы

$$x - Ax = c, \qquad x \geq 0 \qquad (1.25)$$

при фиксированных A и c.

Уравнение (1.25) вместе с интерпретацией x, A и c называется ***моделью Леонтьева***. Если решение системы (1.25) существует для любого вектора c, то модель Леонтьева (и матрица A) называется ***продуктивной***.

Определение. Максимальное по модулю положительное собственное число λ_A матрицы A называется числом Фробениуса. Соответствующий числу Фробениуса собственный вектор x_A называется вектором Фробениуса.

Теорема. Модель Леонтьева (1.25) продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_A < 1$.

Строгое доказательство этого утверждения можно найти, например, в [2]. Здесь же мы обсудим только экономический смысл свойства продуктивности.

Определение. Матрица A размерности $n \times n$ называется неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести в виду $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, где A_1 – матрица размерности $k \times k$, A_3 – матрица размерности $(n-k)\times(n-k)$.

Неразложимость матрицы в модели Леонтьева означает, что каждая отрасль использует хотя бы косвенно продукцию всех отраслей.

Удобным для проверки продуктивности матрицы A и экономически осмысленным является достаточный признак продуктивности: если матрица A неотрицательна и неразложима, сумма элементов каждой строки не больше 1 и хотя бы для одной строки строго меньше 1, то модель Леонтьева (1.25) с матрицей A продуктивна.

Элемент a_{ij} матрицы A показывает, на какую сумму j-я отрасль расходует продукции отрасли i-й отрасли из расчета на единицу своей продукции. Условие $r_i = \sum_j a_{ij} \leq 1$ означает, что i-я отрасль способна удовлетворить запросу всех отраслей.

Упражнение 6. Показать, что условие $r_i = \sum_j a_{ij} \le 1$, $i = 1,...,n$, *не является достаточным для продуктивности матрицы* $A = (a_{ij})$.

Отметим, что если модель Леонтьева продуктивна, то вектор валового выпуска, который необходим для удовлетворения конечного спроса c, определяется выражением $x = (E - A)^{-1}c$. Здесь и далее E обозначает единичную матрицу.

Более общий подход к описанию функционирования многоотраслевой экономики предоставляет модель Неймана. Предположим, что в экономике все продукты выпускаются в результате конечного набора производственных процессов вида (a^j, b^j), $j = \overline{1,m}$, где вектор $a^j = (a_{1j},...,a_{nj})$ описывает затраты, вектор $b^j = (b_{1j},...,b_{nj})$ – выпуск товаров при функционировании j-го процесса с единичной интенсивностью. Обозначим $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда технология производства в экономике задается парой неотрицательных матриц (A, B), которые называются, соответственно, ***матрицей затрат*** и ***матрицей выпуска***.

Для любого вектора интенсивностей $x = (x_1,...,x_m)$, $x_j \ge 0$, можно определить множество фиктивных процессов, описывающих режимы совместной работы отраслей, соответствующих указанным производственным процессам:

$C = \{(y,z) \mid \exists x \ge 0 : y = Ax,\ z = Bx\}$.

Таким образом, технологическое множество (1.6) в модели Неймана имеет вид: $F(x) = \{y \mid \exists z \ge 0:\ y = zB,\ zA \le x\}$. Ясно, что модель Леонтьева является частным случаем модели Неймана при $n = m$, $B = E$.

Модель Леонтьева допускает различные расширения, из которых мы рассмотрим возможность учета в производственном процессе трудовых затрат.

1.2.3.2 Учет трудовых затрат в модели Леонтьева

Сопоставим j-й отрасли число $l_j > 0$, обозначающее затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности данного технологического процесса (отрасли). В таком случае технология производства представляется парой (l, A), где $l = (l_1, ..., l_n)$, A – матрица прямых затрат. Будем считать, что общие трудовые ресурсы ограничены величиной $L > 0$.

Если режим работы экономической системы, описываемой моделью Леонтьева, задается вектором интенсивностей x, то в новой ситуации уже не любой вектор $x \geq 0$ будет допустимым. Иными словами, решение системы

$$x - Ax = c, \ \langle x, l \rangle \leq L, \ \ x \geq 0$$

существует не при любом неотрицательном c и, значит, нельзя ставить вопрос об удовлетворении любого конечного потребления $c \geq 0$. Однако в такой ситуации можно перейти к следующей задаче оптимизации.

Предположим, что вектор $c \geq 0$ задает не конечный спрос, а только его структуру, т.е. $\|c\| = 1$. Тогда можно рассмотреть задачу

$$\begin{gathered} \max \alpha \\ x - Ax \geq \alpha c, \ \langle x, l \rangle \leq L, \quad x \geq 0. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Она отражает стремление к максимизации количества выпущенных «комплектов» c.

Заметим, что если матрица A продуктивна, то задача (1.26) допустима. Например, если $\alpha = 1$, то в силу продуктивности матрицы A существует неотрицательное решение $\tilde{x}$ уравнения $x - Ax = c$. Для любого $L > 0$ найдется такое число $\mu > 0$, что $\langle \mu\tilde{x}, l \rangle \leq L$. Тогда вектор $\mu\tilde{x}$, $\alpha = \mu$, будет допустимым в задаче (1.26). Следовательно, эта задача имеет решение.

Построим к ней двойственную [5], введя вектор двойственных переменных p к первому неравенству и двойственную переменную q – ко второму:

$$\begin{aligned} &\min Lq \\ &lq \geq p(E-A),\ \langle c, p\rangle \leq 1,\ p \geq 0,\ q \geq 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Решение задачи, двойственной к (1.26), допускает вполне определенную экономическую интерпретацию. Рассмотрим некоторое решение (p^*, q^*) задачи (1.27). Из теоремы двойственности следует, что если, к примеру, $p_1^* > 0$, то соответствующее этой компоненте двойственного вектора ограничение в прямой задаче в точке решения выполняется как равенство, т.е. $\alpha c_1 = x_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j$. Это означает, что 1-й продукт расходуется полностью на производственные нужды и конечное потребление. Тем самым, можно сказать, что этот ресурс дефицитен. Наоборот, если $p_1^* = 0$, то можно показать, что найдется такое решение прямой задачи, в котором соответствующее ограничение на использование ресурса будет выполнено как строгое равенство. Таким образом, этот ресурс используется не полностью. Это означает, что двойственные переменные к ограничениям на ресурсы имеют смысл объективно обусловленных оценок этих ресурсов[7].

Если матрица A неразложима, то в любом решении (x, α) задачи (1.26) $x > 0$ и $\alpha > 0$, поэтому ограничения в двойственной задаче выполняются как равенства, из которых можно определить двойственные переменные:

$$q = \frac{1}{l(E-A)^{-1}c},\ p = \frac{l(E-A)^{-1}}{l(E-A)^{-1}c}.$$

Если теперь двойственные переменные к ограничениям на ресурсы интерпретировать как цены на эти ресурсы, тогда вектор p определяет вектор цен на продукцию, а число q – заработную плату за единицу труда. Таким образом, двойственная задача состоит в минимизации фонда заработной платы при условии неположительности чистой прибыли.

[7] Описанная интерпретация двойственных переменных справедлива и в общей задаче математического программирования.

Из теории двойственности следует, что $Lq = \alpha = \langle \alpha c, p \rangle$, т.е. величина выплаченной заработной платы равна стоимости товаров конечного потребления. Кроме того, получается, что цена на товары пропорциональна затратам трудовых ресурсов.

Учет затрат труда в модели Леонтьева позволяет по-другому посмотреть на вопрос о потреблении. Пусть c – средства, предназначенные для оплаты труда одного работника (в натуральном выражении это имеет смысл рациона или пайка). При заданном векторе интенсивностей x затраты на производство составят $Ax + Lc$. Условия соблюдения баланса материальных затрат и трудовых ресурсов приводят к следующей системе неравенств:

$$Ax + Lc \le x, \ \langle l, x \rangle \le L, \ \ x \ge 0. \tag{1.28}$$

Сделав замену $y = x / L$, получим:

$$Ay + c \le y, \ \langle l, y \rangle \le 1, \quad y \ge 0. \tag{1.29}$$

Говорят, что модель (1.28) ***c*-продуктивна**, если система (1.29) имеет решение. Ясно, что c-продуктивность означает возможность оплачивать труд каждого работающего в размере c.

Если матрица A неразложима, $c \ne 0$, то из c-продуктивности следует обычная продуктивность.

Необходимым и достаточным условием c-продуктивности модели (1.28) является выполнение неравенства $l(E - A)^{-1} c \le 1$, которое означает, что полные трудовые затраты на изготовление «пайка», предназначенного для одного работника, не должны превосходить единицу, т.е. каждый работник может «прокормить» самого себя.

Глава 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Equation Section (Next) Все рассмотренные в главе 1 подходы к описанию производства носят статический характер – рассматривают экономику в некотором «фиксированном» состоянии. Реальная экономическая ситуация непрерывно меняется, поэтому для получения хоть сколько-нибудь адекватного ее описания необходимо при моделировании производственных процессов учитывать фактор времени.

Отметим наиболее важные особенности динамического описания производства:

- со временем происходит изменение технологического множества за счет изменения порождающего его отображения F, обусловленного накоплением научных и технических знаний;
- производственные затраты осуществляются (и, значит, должны оплачиваться) раньше, чем реализуется произведенная за счет этих затрат продукция;
- как уже отмечалось ранее, производственные затраты разделяются на текущие и капитальные в зависимости от характерного времени их использования. К капитальным затратам относят вложения в основные производственные фонды, на создание которых может потребоваться довольно продолжительное время;
- имеющиеся производственные мощности со временем изнашиваются (устаревают или выходят из строя), одновременно за счет инвестиций в производство могут создаваться новые мощности.

Изученные нами статические производственные модели являются конструктивной основой для динамического описания производства. Мы попытаемся учесть перечисленные особенности динамики производственных процессов, модифицируя модели производства, рассмотренные в п. 1.2.

2.1 Учет научно-технического прогресса в производственной функции

Предположим, что производственная структура экономики подвержена со временем изменениям, обусловленным разными причинами, которые мы условно назовем научно-техническим прогрессом. Это явление было обнаружено при первых же попытках построения производственных функций и использования их как инструмента для получения прогнозов.

Как и в п. 1.2.1, рассмотрим однопродуктовую двухфакторную производственную функцию. Учтя в ней зависимость от времени[8], получим функцию вида

$$Y(t) = F(K(t), L(t), t)\,. \tag{2.1}$$

Будем, как и ранее, предполагать, что она является линейно-однородной по факторам производства:

$$F(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda F(K, L, t)\,.$$

Под ***научно-техническим прогрессом (НТП)*** будем понимать монотонное возрастание функции $F(K, L, t)$ по t. Примерами производственных функций такого типа являются:

$$1)\, Y = A(t) F_0(K, L)\,, \tag{2.2}$$

$$2)\, Y = F_0(K, A(t)L)\,, \tag{2.3}$$

$$3)\, Y = F_0(A(t)K, L)\,. \tag{2.4}$$

По мере практического изучения производственных функций было выдвинуто несколько гипотез относительно характера воздействия научно-технического прогресса. Как правило, предполагалось, что научно-технический прогресс приводит к изменению основных производственных характеристик – производительности труда, фондовооруженности, предельных производительности труда и фондоотдачи, коэффициентов эластичности, нормы и эластичности замещения (их определение см. в п.1.2.1). Такое предположение вполне оправдано. Например, качественное изменение состава производственных фондов приводит к росту

[8] Если факторы производства, входящие в производственную функцию, имеют стоимостное выражение, они должны быть измерены в постоянных ценах (происходящее со временем изменение уровня цен должно быть исключено).

производительности труда. Естественно, что прогресс воздействует сразу на несколько характеристик, поэтому основным для классификации различных типов НТП является сохранение между ними определенных зависимостей во времени.

Технический прогресс называется ***нейтральным по Хиксу***, если предельная норма замещения s является постоянной во времени функцией фондовооруженности k, т.е.

$$s = \frac{f}{f'} - k = \varphi(k), \tag{2.5}$$

где $\varphi(k)$ – некоторая функция, а предельная норма замещения определена в (1.10). Исходя из этого соотношения, можно определить вид удовлетворяющей ему производственной функции.

Пусть $f_0(k)$ – частное решение уравнения (2.5). Общее решение этого уравнения должно содержать одну произвольную константу (зависящую от времени, но не зависящую от k). Нетрудно видеть, что функция вида $y = A(t) f_0(k)$ является общим решением уравнения (2.5) при любом $A(t)$. Переходя от фондовооруженности k и средней производительности труда y к переменным K, L, Y, получаем функцию вида (2.2). Множитель $A(t)$ называют ***мультипликатором*** прогресса и интерпретируют как меру состояния технических знаний. Обычно считают, что $A(t) > 0$ и $A'(t) > 0$.

Технический прогресс называется ***нейтральным по Харроду***, если предельная фондоотдача r является постоянной во времени функцией средней фондоотдачи z, т.е.

$$f' = \psi(y/k).$$

Такому уравнению удовлетворяет функция вида $f = A(t) f_0(k / A(t))$, где $f_0(k)$ – частное решение этого уравнения. В переменных Y, K, L получим функцию вида (2.3). Нейтральный по Харроду технический прогресс эквивалентен росту во времени численности рабочей силы. Такой тип НТП также называют капиталосберегающим.

Технический прогресс называется ***нейтральным по Солоу***, если предельная производительность труда является постоянной во времени функцией средней производительности труда.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, дают производственную функцию вида (2.4). Прогресс такого типа эквивалентен росту во времени основных производственных фондов, поэтому его также называют трудосберегающим.

Упражнение 7. Показать, что производственная функция нейтрального по Солоу технического прогресса имеет вид (2.4).

Перечисленные типы научно-технического прогресса отражают ***экзогенный прогресс***, т.е. технологические изменения, которые не обуславливаются самой производственной функцией, а только учитываются ею. Так, технический прогресс, нейтральный по Хиксу, можно трактовать как учет растущего опыта работников, отражение современного состояния научно-технических знаний. При этом изменение коэффициента $A(t)$ происходит независимо от остальных параметров производственной модели.

Модели, в которых происхождение научно-технического прогресса определяется внутри самой модели и зависит от действий участников моделируемой системы, называются моделями с ***эндогенным*** НТП. Пример такой модели будет рассмотрен в п. 3.2.1.

2.2 Учет времени при распределении мощностей по технологиям

В п. 1.2.2 мы выяснили, как из микроописаний производственных процессов можно получить описание производственной системы. Это оказалось возможным благодаря введению распределения производственных мощностей по технологиям. Значит, и влияние фактора времени на микроуровне следует учитывать как изменение со временем производственных мощностей. Таким образом, мы переходим от функции распределения мощностей по технологиям $m(\lambda)$ к функции $m(t,\lambda)$, относительно которой примем следующее упрощение. Будем считать, что $m(t,\lambda)$ является функцией с разделяющимися переменными, т.е.

$$m(t,\lambda) = M(t)\,h(\lambda). \tag{2.6}$$

Содержательно это предположение означает, что распределение мощностей $m(t,\lambda)$ со временем меняет лишь масштаб, сохраняя при этом свою форму. Функция $h(\lambda)$ определяет форму распределения мощности по технологиям, а функция $M(t)$ отвечает за изменение масштаба со временем.

В выражении (2.6) функцию $h(\lambda)$ можно нормировать так, что

$$\int_0^\infty h(\lambda)\,d\lambda = 1. \tag{2.7}$$

Нормировка осуществляется учетом соответствующего множителя в функции масштаба $M(t)$, которая приобретает смысл суммарной производственной мощности: $M(t) = \int_0^\infty m(t,\lambda)\,d\lambda$. Мы будем считать, что интеграл $\int_0^\infty m(t,\lambda)\,d\lambda$ сходится, т.е. суммарная мощность конечна. Такое предположение оправдано в силу того, что мощности создаются за счет предшествующих капитальных затрат и потому не могут быть бесконечными.

Подставляя в выражения (1.18) и (1.19), определяющие производственную функцию, распределение мощности (2.6) и учитывая зависимость от времени, получаем:

$$L(t) = M(t)\int_0^{\xi(L(t))} \lambda h(\lambda)\,d\lambda\,,\; Y(t) = F(t, L(t)) = M(t)\int_0^{\xi(L(t))} h(\lambda)\,d\lambda\,.$$

Отсюда

$$\frac{Y(t)}{M(t)} = f\left(\frac{N(t)}{M(t)}\right), \tag{2.8}$$

где не зависящая от времени монотонная и вогнутая функция загрузки мощности $f(\cdot)$ определяется соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^\xi h(\lambda)\,d\lambda\,,\ \xi:\ x = \int_0^\xi \lambda h(\lambda)\,d\lambda, & x < \int_0^\infty \lambda h(\lambda)\,d\lambda, \\ 1, & x \ge \int_0^\infty \lambda h(\lambda)\,d\lambda. \end{cases} \tag{2.9}$$

Заметим, что уравнение (2.8) задает совокупный объем производства как вогнутую монотонную положительно однородную функцию двух факторов производства: совокупной мощности M

и затрат труда L. Таким образом, из микроописаний мы получили производственную функцию вида (2.1).

2.3 Динамическая модель Неймана

Теперь обратимся к учету фактора времени в линейных производственных моделях и сначала рассмотрим динамический вариант модели Неймана (см. п. 1.2.3.1). Будем считать, что матрицы затрат A и выпуска B постоянны, а вектор интенсивностей x меняется со временем. Также предположим, что

- экономика функционирует в течение T периодов времени;
- в каждый период $[t-1,t]$ для производства применяется один из процессов множества $C=\{(y,z)\,|\,\exists x\geq 0: y=Ax,\ z=Bx\}$, характеризующихся вектором интенсивностей $x(t)$;
- на производство в периоде $[t,t+1]$ могут быть потрачены только те продукты, которые были произведены в период $[t-1,t]$ (модель является замкнутой), т.е. $Ax(t)\leq Bx(t-1)$. Значение величины начальных запасов $Bx(0)$ считается. Последовательность векторов $x(1),x(2),...,x(T)\overset{def}{=}\{x(T)\}$, удовлетворяющая этому неравенству, будем называть ***планом***.

Здесь мы учтем отмеченный в самом начале главы 2 факт разделения во времени моментов оплаты производителями затрат и получения выручки от продаж. Для этого мы предположим, что все товары имеют цены, изменяющиеся от периода к периоду: $p^i(t-1)$ – цена единицы продукции в период $[t-1,t]$, $p(t-1)=(p^1(t-1),...,p^n(t-1))$, $p(t-1)\geq 0$. В таком случае доход производственного процесса (a^j,b^j) в период $[t-1,t]$ составляет $\left\langle p(t),b^j\right\rangle-\left\langle p(t-1),a^j\right\rangle$. Поскольку рассматриваемая экономическая система является замкнутой, то в ней должно выполняться условие сохранение денежной массы. Это означает, что ни один из процессов не должен иметь положительного дохода: $p(t-1)A\geq p(t)B$.

В явном виде предположения о неизменности денежной массы и постоянном ее обращении (вся выручка от продажи идет на закупку сырья) записывается в виде системы:

$$p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t), \qquad t = 1, 2, ..., T \tag{2.10}$$

$$p(t)Bx(t-1) = p(t)Ax(t), \qquad t = 1, 2, ..., T\,. \tag{2.11}$$

При изучении поведения динамических систем важную роль играют стационарные траектории.

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется ***стационарной***, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \le Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарная тогда и только тогда, когда $\mu pA \ge pB$.

Для стационарных траекторий интенсивностей и цен условия неизменности денежной массы (2.10) и (2.11) принимают, соответственно, вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p), где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \le Bx, \quad \mu pA \ge pB, \quad \mu pAx = pBx, \quad \nu pAx = pBx\,. \tag{2.12}$$

Из системы (2.12) следует, что $\nu = \mu \overset{def}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \le Bx \tag{2.13}$$

$$\alpha pA \ge pB \tag{2.14}$$

$$pAx > 0\,. \tag{2.15}$$

Луч $\{y \mid \exists \mu \geq 0,\ y = \mu x\}$, где вектор x участвует в невырожденном положении равновесия, называется ***лучом Неймана.***

Теорема. Пусть в модели Неймана $A \geq 0$, $B \geq 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (2.13)-(2.15).

Условия этой теоремы означают, что нет производственных процессов, которые ничего не тратят, и всякий процесс производит продукт.

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min u$$

$$(A - \lambda B)x - ue^n \leq 0, \left\langle x, e^m \right\rangle = 1,\ x \geq 0. \tag{2.16}$$

Здесь λ – числовой параметр, x, u – переменные, e^n – n-мерный единичный вектор, e^m – m-мерный единичный вектор. Функция $u(\lambda)$, являющаяся значением задачи (2.16) в зависимости от параметра λ, обладаем следующими свойствами:

1) $u(\lambda)$ непрерывна на всей числовой оси,
2) $u(0) > 0$,
3) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} u(\lambda) = -\infty$,
4) $u(\lambda)$ монотонно убывает.

Из этих свойств следует, что существует $\bar{\lambda} > 0$, для которого $u(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{x}$ соответствующее решение задачи (2.16). Тогда $A\bar{x} \leq \bar{\lambda} B\bar{x},\ \bar{x} \geq 0$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (2.16):

$$\max v$$

$$p(A - \lambda B) - ve^n \geq 0, \left\langle p, e^n \right\rangle = 1,\ p \geq 0. \tag{2.17}$$

По теореме двойственности $v(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{p}$ соответствующее решение задачи (2.17). Тогда $\bar{p}A \geq \bar{\lambda}\bar{p}B,\ \bar{p} \geq 0$. Таким образом, тройка $(\bar{\lambda}^{-1}, \bar{x}, \bar{p})$ является положением равновесия в модели Неймана. Однако оно может быть вырожденным.

Для указания невырожденного положения равновесия рассмотрим множество решений уравнения $u(\lambda) = 0$. Из свойств функции $u(\lambda)$ нетрудно заключить, что это множество является отрезком $[\lambda_0, \lambda_1]$, причем $\lambda_0 > 0$. Покажем, что существует невырожденное равновесие, соответствующее числу $\alpha = \lambda_1^{-1}$.

Среди всех решений $\bar{p}$ задачи (2.17) выберем p^*, для которого вектор p^*A обладает наибольшим числом положительных компонент. Теперь покажем, что существует вектор x^*, который образует вместе с указанными α и p^* невырожденное положение равновесия. Допустим противное. Тогда из того, что $(A - \lambda_1 B)x \le 0$ и $x \ge 0$ следует, что $p^*Ax \le 0$. По теореме о линейных неравенствах [3] это означает, что существует неотрицательный вектор q, удовлетворяющий условию $q(A - \lambda_1 B) \ge p^*A$.

Вектор q обладает следующими свойствами:

$(qA)_j > \lambda_1 (qB)_j$, *для* $j \notin \{j \mid (pA)_j = 0\}$,

$(qA)_j = \lambda_1 (qB)_j = 0$, *для* $j \in \{j \mid (pA)_j = 0\}$,

которые означают, что существует $\Delta > 0$ такой, что $qA \ge (\lambda_1 + \Delta)B$, т.е. вектор $(q, 0)$ допустим для задачи (2.17) при $\lambda = \lambda_1 + \Delta$. Следовательно, $u(\lambda_1 + \Delta) = v(\lambda_1 + \Delta) \ge 0$, что противоречит свойствам функции $u(\lambda)$ и максимальности числа λ_1. Тем самым показано, что числу λ_1 отвечает невырожденное положение равновесия $(\lambda_1^{-1}, x^*, p^*)$, и теорема доказана.

Приведенное доказательство является конструктивным, поскольку оно указывает способ нахождения числа λ_1, определяющего темп роста экономики в модели Неймана.

Отметим связь между состояниями равновесия модели Неймана и решениями задач (2.16) и (2.17).

Теорема. Тройка (α, x, p) является положением равновесия (быть может, вырожденного) в модели Неймана тогда и только тогда, когда $u(\alpha^{-1}) = 0$, а пары $(x, 0)$ и $(p, 0)$ являются, соответственно, решениями пары двойственных задач (2.16) и (2.17) при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Определение. Число α называется темпом роста.

Определение. Число λ_0 называется ***числом Неймана***, число λ_1 – ***числом Фробениуса*** модели Неймана (A, B).

Числа $\alpha = \lambda_0^{-1}$ и $\beta = \lambda_1^{-1}$ определяют, соответственно, максимально и минимально возможные темпы роста по стационарной траектории.

Отметим имеющуюся аналогию между собственными числами матрицы Леонтьева и темпами роста модели Неймана с точки зрения продуктивности.

Определение. Модель Неймана (A, B) ***продуктивна***, если система $Bx - Ax \geq c$, $x \geq 0$, имеет решение при любом $c \geq 0$.

Теорема. Модель Неймана продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше 1.

2.4 Модель динамического межотраслевого баланса

Основу статической модели Леонтьева (см. п.1.2.3.1) составляет раздельный учет производственных затрат различных отраслей. В случае учета времени здесь, однако, необходимо дополнительно выделить отрасли, производящие фондообразующие продукты, и отрасли, продукция которых определяет состав текущих затрат. Для фондообразующих отраслей учтем временной лаг – запаздывание в создании новых мощностей.

Как и в статической модели Леонтьева, рассмотрим экономику, производящую и потребляющую n типов товаров (разделенную на n соответствующих чистых отраслей), совокупный запас которых описывает вектором $x = (x_1, ..., x_n)$. Матрица Леонтьева A задает технологические затраты каждой из n чистых отраслей при выпуске единицы продукции. Через ξ_j обозначим производственную мощность j-й отрасли (максимально возможный выпуск, обусловленный наличием основных фондов). Тогда $\xi = (\xi_1, ...\xi_n)$ – вектор максимально возможного выпуска. Для увеличения выпуска каждой отрасли необходимо увеличить свои мощности, при этом должны быть затрачены продукты других отраслей. Через η_j обозначим желаемое приращение мощности

j-й отрасли, тогда вектор $(\eta_j d_{1j},...,\eta_j d_{nj})$ определяет затраты всех производимых товаров, необходимые для увеличения мощности на желаемую величину η_j. Таким образом, если $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ – вектор, определяющий желаемое увеличение мощности во всей экономике, то суммарные материальные затраты составят $D\eta$, где $D = (d_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Предположим, что для выпуска единицы продукта j-й отрасли требуется l_j трудовых затрат, тогда $l = (l_1,...,l_n)$ – вектор трудовых затрат. Величина L определяет общее количество занятых в экономике, $c = (c_1,...,c_n)$ – вектор потребления на одного рабочего (его заработная плата в натуральном выражении).

Теперь выпишем динамическую систему, описывающую развитие экономики в течение некоторого конечного числа периодов времени $t = 1,2,...,T$, в которой общее число занятых, объем производства, мощности и затраты на создание новых мощностей меняются со временем.

Затраты на производство, строительство и оплату труда не превосходят объема производства:

$$Ax(t) + D\eta(t) + L(t)c \le x(t); \tag{2.18}$$

объем производства не превосходит имеющейся мощности:

$$x(t) \le \xi(t-1); \tag{2.19}$$

новые мощности создаются на основе имеющихся с учетом желаемого прироста:

$$\xi(t) \le \xi(t-1) + \eta(t); \tag{2.20}$$

трудовые ресурсы ограничены:

$$\langle l, x(t) \rangle \le L(t). \tag{2.21}$$

Кроме того, $(x(t), \xi(t), \eta(t), L(t)) \ge 0$, $t = 1,2,...,T$, значение $\xi(0)$ – определяет объем производственных мощностей перед началом функционирования экономики и считается заданным.

Основным упрощающим предположением в этой модели является то, что запаздывание в строительстве новых мощностей во всей экономике составляет 1 период. В действительности оно может быть больше или меньше, а также разным для разных отраслей.

Описание экономическое системы с помощью модели (2.18)-(2.21) определяется ***траекторией*** $(x(t), \xi(t), \eta(t), L(t))$, $t = 1, 2, ..., T$, удовлетворяющей указанной системе неравенств. В общем случае существует бесконечного много траекторий, удовлетворяющих системе (2.18) - (2.21), поэтому необходимо ввести критерий оценки качества траектории, который обеспечил бы возможность выбора какой-то одной, в некотором смысле «наилучшей». В общем случае таким критерием является зависящий от времени и значений координат траектории целевой функционал. Например, можно рассмотреть конечное (терминальное) состояние экономики $(x(T), \xi(T), \eta(T), L(T))$ и в качестве целевого функционала выбрать функцию

$$\langle c_1, x(T)\rangle + \langle c_2, \xi(T)\rangle + \langle c_3, \eta(T)\rangle + c_4 L(T), \tag{2.22}$$

где c_1, c_2, c_3 – n-мерные векторы, c_4 – число.

Тогда оптимизационная задача для модели динамического межотраслевого баланса формулируется следующим образом: при заданном начальном векторе производственных мощностей $\xi(0)$ и заданных коэффициентах терминального функционала (c_1, c_2, c_3, c_4) среди всех траекторий, удовлетворяющих системе (2.18)-(2.21), найти ту, которая доставляет максимум суммы (2.22).

Модель (2.18)-(2.22) можно переписать в следующем виде:

$$\max\langle \tilde{c}, \tilde{x}(T)\rangle$$

$$\tilde{A}\tilde{x}(t) \le \tilde{B}\tilde{x}(t-1), \tag{2.23}$$

$$\tilde{x}(t) \ge 0,\ t = 1, 2, ..., T,\ \tilde{x}(0) = (0, 0, \xi(0), 0) \text{ – задано.}$$

Здесь

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & D & c \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = (x, \xi, \eta, L),\ \tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Заметим, что запись (2.23) по внешнему виду напоминает модель Неймана. Однако матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не удовлетворяют условиям, накладываемым на матрицы A и B модели Неймана:

они могут иметь отрицательные элементы и в них существуют нулевые строки и столбцы.

В модели межотраслевого баланса (2.18)-(2.21) равновесная траектория определяется темпом роста $\alpha = \lambda^{-1}$ и лучом (x, ξ, η, L) таким, что $x(t) = \lambda^{-t} x$, $\xi(t) = \lambda^{-t} \xi$, $\eta(t) = \lambda^{-t} \eta$, $L(t) = \lambda^{-t} L$.

Подставляя эти выражения в систему (2.18)-(2.21), получим

$$Ax + D\eta + Lc \le x,\ x \le \lambda\xi,\ \xi \le \lambda\xi + \eta,$$

$$\langle l, x \rangle \le L,\ (x, \xi, \eta, L) \ge 0.$$

Существование равновесия в этой модели обеспечивают дополнительные условия на параметры модели.

Заметим, что если, например, положить $\eta = 0$, то получится модель Леонтьева с учетом трудовых ресурсов, существование решения которой определяется выполнением условия c-продуктивности. В данном случае оно будет эквивалентно условию продуктивности матрицы $A + R$, где $R = (r_{ij})$, $r_{ij} = c_i l_j$.

В общем случае будем предполагать выполнение следующих ограничений:

1) A -неотрицательна и неразложима,
2) $l > 0, c \ge 0, c \ne 0$,
3) $A + R$ – продуктивна,
4) $D \ge 0$ и из того, что $\eta \ge 0$, $D\eta = 0$ следует $D = 0$.

Теорема. При выполнении условий 1)-4) в динамической модели межотраслевого баланса существует состояние равновесия с темпом роста $\bar{\alpha} = \bar{\lambda}^{-1}$, которому соответствует единственный луч Неймана $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{L})$, причем

$\bar{\lambda}$ – число Фробениуса матрицы $Q(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}(A + R) + (1 - \bar{\lambda})D$,

$\bar{x}$ – правый вектор Фробениуса матрицы $Q(\bar{\lambda})$,

$\bar{\xi} = \bar{\lambda}^{-1}\bar{x},\ \bar{\eta} = \bar{\lambda}^{-1}(1 - \bar{\lambda})\bar{x},\ \bar{L} = \langle l, \bar{x} \rangle$.

2.5 Элементы магистральной теории

Основной трудностью при практическом использовании многосекторных моделей типа модели Леонтьева или Неймана и модели межотраслевого баланса является большая размерность возникающих оптимизационных задач, вызывающая сложности при непосредственном применении методов линейного программирования. Кроме того, существует проблема выбора целевого функционала, с помощью отбирается оптимальная траектория, а также выяснение особенностей поведения динамической системы при достаточном удалении от начальной точки. Поэтому представляет интерес качественное изучение траекторий поведения динамических систем. Основным результатом здесь является появление магистральной теории [45].

Обратимся к модели Неймана:

$$\begin{gathered} \max\langle c, x(T)\rangle \\ Ax(t) \le Bx(t-1),\ t = 1,..,T. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Задачу (2.24) можно интерпретировать следующим образом: задана технология производства (A, B), вектор начального состояния $Bx(0)$ и некоторый вектор цен на товары $q \in \mathbb{R}^n$. Требуется найти такую траекторию $\{x(1), x(2),..., x(T)\}$, чтобы стоимость $\langle q, Bx(T)\rangle$ набора товаров, выпущенного в последнем периоде, была наибольшей ($qB^{-1} = c$).

Целевой функционал в задаче (2.24) называется ***терминальным***, поскольку его значение зависит только от состояния системы в последний (терминальный) момент времени. Траектория $x(t),\ t = 1,...,T$, удовлетворяющая неравенствам в (2.24) и доставляющая максимально возможное значение целевому функционалу, называется ***оптимальной***.

Пусть пара $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ задает стационарную траекторию интенсивностей. Будем считать, что $\bar{x}$ – единственное, с точностью до постоянного множителя.

Основной вывод магистральной теории состоит в том, что все оптимальные траектории группируются около луча, определяющего стационарную траекторию, т.е. являются в некотором смысле близкими. Будем понимать близость траекторий в смысле ***квазиметрики*** $\rho(x, y) = \left|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right|$.

Определение. Луч $\bar{x}$ является ***магистралью*** для задачи (2.24) если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $T_1(\varepsilon)$ и $T_2(\varepsilon)$, что для всякой оптимальной траектории $\{x(t)\}$ выполнятся условия:

$\rho(x(t), \bar{x}) < \varepsilon$ для всех t таких, что $T_1(\varepsilon) < t < T - T_2(\varepsilon)$.

Утверждение, устанавливающее наличие магистрали для динамической системы (например, (2.24)), называется ***теоремой о магистрали***.

Динамический аналог модели Леонтьева

Рассмотрим n чистых отраслей, матрицу межотраслевого баланса $A^{n\times n}$, определяющую структуру затрат при производстве вектора $x \in \mathbb{R}_+^n$. Будем считать, что затраты в периоде $[t-1, t]$ могут быть произведены в объеме выпуска в предыдущем периоде. Тогда получаем следующую динамическую задачу с терминальным функционалом:

$$\begin{aligned}&\max \langle c, x(T)\rangle\\ &Ax(t) \le x(t-1),\\ &x(t) \ge 0, t = 1, ..., T.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Теорема. Вектор Фробениуса $\tilde{x}$ матрицы A является магистралью для задачи (2.25).

Это же утверждение выполнено и для задачи другого типа:

$$\max \sum_{t=1}^{T} \lambda_A^t \langle c(t), x(t)\rangle$$

$$Ax(t) \le x(t-1),\ x(t) \ge 0,\ t = 1, ..., T, .$$

$$x(T) \ge \bar{\alpha}\hat{x},\ x(0) > 0.$$

Интерпретация этой постановки следующая: найти такую траекторию динамической системы, которая доставляла бы максимум суммарной дисконтированной стоимости выпущенной продукции при условии соблюдения технологии производства и выполнении плана в терминальный момент.

Общая модель неймановского типа

Рассмотрим задачу (2.24), но при этом не будем накладывать ограничений на неотрицательность матриц A и B. Исследование поведения оптимальных траекторий такой задачи является более сложным, и потому к ней предъявляются некоторые требования. Будем считать, что

1) существует такое число $\bar{\lambda}$ такое, что система $(A-\bar{\lambda}B)x \le 0$, $\langle c, x\rangle = 1$ определяет единственный вектор $\bar{x}$;
2) вектор $\bar{x}$ является допустимым: $A\bar{x} \le Bx(0)$; это предположение означает существование допустимой стационарной траектории;
3) система уравнений $pA = c - \tilde{p}A,\ pB = 0$ имеет неотрицательное решение $p \ge 0$, где $\tilde{p}$ – решение системы $p(A-\bar{\lambda}B) = 0$, $p \ge 0$; формально это предположение сводится к требованрию, чтобы стационарная траектория цен вида $p(t) = \bar{\lambda}^{t-T}\tilde{p}$ была допустима для задачи, двойственной[9] к (2.24).
4) пусть λ – действительное или комплексное число, для которого существует ненулевое решение уравнения $(A_1 - \lambda B_1)z = 0$. Если $|\lambda| = 1$, то $\lambda = 1$. Здесь A_1 и B_1 такие подматрицы матриц A и B, соответственно, что $(A_1 - \bar{\lambda}B_1)\bar{x} = 0$.
5) $A_1 x \ge 0$, причем если $\langle a_i, x\rangle = 0$, то $b_i = 0$, где a_i – i-я строка матрицы A_1, b_i – i-я строка матрицы B_1.

Теорема. При выполнении условий 1)-5) для любого β найдется такое число $\tilde{T}$, не зависящее от T, что для любой оптимальной траектории $\{x(t)\}$ задачи (5.1) выполняются условия: $\rho(x(t), \bar{x}) < \beta$ для любого t такого, что $\tilde{T} \le t \le T - \tilde{T}$.

Сформулированная теорема означает, что существует участок, на котором всякое оптимальное решение задачи (2.24) приближается к стационарному решению $\bar{x}$.

---

[9] Поскольку задача (2.24) описывает функционирование экономической системы в течение конечного числа периодов времени, то эту задачу можно рассматривать как задачу линейного программирования.

Модель динамического межотраслевого баланса

Теорема. Пусть $\xi(0) > 0$, матрица $A + R$ неразложима и продуктивна, матрица $\lambda(A+R)+(1-\lambda)D$ неотрицательна, неразложима и из того, что $\bar{\lambda}$ является ее числом Фробениуса, λ – произвольное ее собственное значение и $|\lambda| = \bar{\lambda}$, следует $\lambda = \bar{\lambda}$. Тогда вектор $\tilde{x} = (\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{L})$ является магистралью для задач и (2.18) -(2.21) с целевым функционалом (2.22).

Мы не будем доказывать приведенных теорем. За соответствующими доказательствами, а также за более подробным изложением результатов магистральной теории мы отсылаем к [2, 17, 20, 25]. Здесь заметим, что наличие магистралей позволяет для исследования поведения динамических систем находить только стационарные траектории.

Глава 3. ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Equation Section (Next)Теперь, после того как мы изучили классические подходы к описанию поведения отдельных экономических агентов, мы обратимся к основным принципам описания взаимодействий экономических агентов. В классической математической экономике выделяют два существенно различающихся подхода – модели равновесия и модели роста.

Концепция равновесия отражает стремление описать механизмы регулирования деятельности экономических агентов в условиях определенной стабильности экономических структур и взаимоотношений. В широком смысле равновесными называются такие состояния экономики, в которых реализуются ожидания экономических агентов. Основное внимание при этом сосредотачивается на изучении индивидуальных мотивов экономических агентов, их отношений, которые обеспечивают равновесие и изучении распределения богатства в равновесии.

Теперь представим, что экономика эволюционирует, растет экстенсивным образом, т.е. происходит количественный рост при неизменных технологиях и предпочтениях потребителей. В этих условиях структура экономики должна оставаться неизменной, и к ее изучению также можно подходить как к статическому равновесию. Такое равновесие называют равновесным сбалансированным ростом. В теории экономического роста, главным образом, изучают программы распределения произведенного продукта на потребление и накопление.

Далее мы рассмотрим модели равновесия в статическом и динамическом случаях. Затем рассмотрим модели роста в двух вариантах – как задачу об оптимальном распределении произведенного продукта между потреблением и накоплением и как задачу об оптимальном распределении произведенного продукта между вложением в развитие технологий и в основные фонды.

3.1 Модели равновесия

Основу для описания экономического равновесия предоставляет модель Вальраса. Эта модель явилась одной из первых экономико-математических моделей. Модель Вальраса предназначена для описания децентрализованной экономики, в которой рассматривается множество независимых производителей и потребителей, каждый из которых руководствуется в выборе своих действий стремлением к собственному благополучию. Согласование действий экономических агентов в такой ситуации достигается при помощи рынка товаров, определяющего согласующие цены на товары.

3.1.1 Модель Вальраса

Предположим, что общество состоит из двух секторов – производственного и потребительского. Производственный сектор состоит из отдельных отраслей, фирм или индивидуумов, выступающих в качестве производителей. Потребительский сектор объединяет все индивидуумы, организации и учреждения, не участвующие непосредственно в производстве.

Товары, обращающие в экономике, разделены на продукты производства и ресурсы (или первичные факторы производства). Ресурсы являются собственностью потребителей, которые продают их с целью приобретения продуктов производства. Получаемый доход образует бюджет потребителя, который целиком расходуется на приобретение товаров с целью получения потребителем максимального удовлетворения от выбираемого ассортимента продуктов. Отметим, что в некоторых модификациях модели Вальраса разделение между продуктами и ресурсами не производится.

Поведение производителя характеризуется стремлением к максимизации прибыли от производства, являющейся разностью выручки от продажи произведенного продукта и затрат на необходимые в производстве продукты и ресурсы. Рассматриваемая экономическая система является замкнутой. Это означает, что полученная производителями прибыль полностью распределяется между потребителями.

Таким образом, каждый участник экономической системы максимизирует некоторую целевую функцию в условиях определенных ограничений. И целевая функция и ограничения зависят от цен на продукты и ресурсы. Вопрос о ценах является центральным в модели Вальраса. Считается, что каждый участник экономической системы не может влиять на цену – он пассивно принимает сложившуюся систему цен. Такое предположение имеет место в так называемой ситуации совершенной конкуренции. Строго говоря, совершенная конкуренция предполагает наличие на рынке некоторого товара бесконечного числа равноправных покупателей и продавцов, поэтому каждый из них в отдельности не может влиять на состояние рынка.

Для реальных экономических рынков такое предположение, вообще говоря, неверно. Исключение составляют, пожалуй, только финансовые рынки и то лишь при определенных условиях отсутствия возможности сговора и получения приватной информации участниками рынка. Однако теория общего равновесия с успехом применяется и для описания рынков с небольшим числом участников. Главным требованием является отсутствие у частников рынка возможности влиять на цену. В этом случае говорят, что участники рынка принимают цену как данность. Это означает, что цена в итоге будет определена таким образом, чтобы решения, выбранные потребителями и производителями, были согласованы.

Опишем модель Вальраса формально.

В экономической системе имеется l потребителей, m производителей и n типов товаров. Мы не будем разделять товары на продукты и ресурсы. Каждый потребитель характеризуется функцией дохода $K_i(p)$ и функцией спроса $\Phi_i(p)$ (см. (1.4)). Будем считать, что доход каждого из потребителей складывается из двух величин – дохода от продажи его начального запаса товаров b^i и некоторого дополнительного дохода $I_i(p)$, т.е. $K_i(p) = \langle b^i, p \rangle + I_i(p)$.

Каждый производитель отождествляется с некоторым производственным процессом $(x, y) \in \Gamma$ (см. (1.6)). При заданных ценах p прибыль производителя от производственного процесса (x, y) составляет $\langle y - x, p \rangle$. Поведение производителя – выбор оптимального производственного процесса – определяется стремлением к максимизации прибыли:

$$\langle y - x, p \rangle = \max_{(x', y') \in \Gamma} \langle y' - x', p \rangle .$$

Разность $y-x$ определяет чистый выпуск производителя. Поскольку выбор действий производителя зависит только от значения этой разности, то введем множество $Y=\{y-x \mid x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in F(x)\}$, которое, также как и множество (1.6), будем называть ***технологическим,*** поскольку при разумных предположениях оказывается безразличным, рассматривается множество Γ или множество Y. Множество оптимальных производственных процессов назовем ***функцией предложения*** $\Psi(p)$. В терминах чистых выпусков $\Psi(p)=\{y\in Y \mid \langle y,p\rangle=\max\limits_{y'\in Y}\langle y',p\rangle\}$.

Относительно множеств X и Y в различных ситуациях делаются те или иные предположения. В большинстве случаев каждое из них имеет определенный экономический смысл. Далее мы будем считать, что $X\subseteq\mathbb{R}^n_+$. Это означает, что каждый вектор $x\in X$ соответствует набору продуктов производства в определенных количествах. Относительно элементов y множества Y обычно предполагают, что если $y\in Y$, $y\geq 0$, то $y=0$. Это условие называется условием отсутствия рога изобилия. Содержательно оно означает, что нет такого процесса, который бы производил нечто, ничего при этом не тратя. Казалось бы, по-другому быть не может. Однако использование этого условия зависит от того, какие продукты и ресурсы включены в перечень затрат. Условием отсутствия рога изобилия можно пренебречь, если считать, что природные ресурсы являются общественным достоянием, либо наличием природных ресурсов вообще пренебрегают (например, такая ситуация имеет место в модели Леонтьева (1.25)).

Итак, будем считать, что k-й производитель характеризуется множеством чистых выпусков $Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ и функцией предложения $\Psi_k(p)$, $k=1,\ldots,m$. Для простоты изложения будем считать множества Y_k компактами.

Назовем ***совокупным технологическим множеством*** сумму $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ и ***функцией совокупного предложения*** производственного сектора сумму $\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p)$.

Пусть $\bar{\Psi}_0(p) = \left\{ y \in Y \,|\, \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle \right\}$ – множество производственных процессов, оптимальных с точки зрения всего производственного сектора. Несложно показать, что производственные процессы, оптимальные с точки зрения всего производственного сектора, оптимальны и с точки зрения каждого производителя. Обратное также верно, т.е. выполнено равенство:

$$\bar{\Psi}_0(p) = \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p) = \Psi_0(p). \tag{3.1}$$

Упражнение 8. Доказать справедливость равенства (3.1).

Равенство (3.1) означает, что мы можем характеризовать весь производственный сектор совокупным технологическим множеством и функцией совокупного предложения, не рассматривая каждого производителя в отдельности.

Определение. Набор $\left(y_1^*, ..., y_m^*; x_1^*, ..., x_l^*; p^* \right)$ неотрицательных векторов называется конкурентным равновесием, если

$$y_k^* \in \Psi_k(p^*),\ k = 1, ..., m, \tag{3.2}$$

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*),\ i = 1, ..., l, \tag{3.3}$$

и выполняются соотношения баланса спроса и предложения:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b^i \geq \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \tag{3.4}$$

$$\left\langle p^*, \sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b^i \right\rangle = \left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle. \tag{3.5}$$

Поясним смысл условий определения конкурентного равновесия. Условия (3.2) и (3.3) означают, что каждый из участников экономической системы, считая цены p^* заданными, действует наилучшим для себя образом. Неравенство (3.4) означает, что совокупный спрос (правая часть неравенства) не должен превышать совокупного предложения (левая часть неравенства). Равенство (3.5) означает, что стоимость купленных товаров равна стоимости проданных. Из этого равенства следует, что если в (3.4) по j-й компоненте имеет место строгое неравенство, то соответствующая компонента равновесных цен $p_j^* = 0$.

Определение. Вектор p^* называется вектором равновесных цен, многозначное отображение $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ – функцией совокупного спроса, отображение $\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p)$, где $b = \sum_{i=1}^{l} b^i$, – функцией совокупного предложения.

Поскольку в силу замкнутости экономики вся прибыль производственного сектора делится между потребителями, то для произвольного $y \in \Psi_0(p)$ выполняется тождество $\sum_{i=1}^{l} I_i(p) \equiv \langle y, p \rangle$, с помощью которого можно показать, что функции $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ связаны соотношением:

$$\langle p, x \rangle \le \langle p, y \rangle, \qquad x \in \Phi(p), \qquad y \in \Psi(p). \tag{3.6}$$

Упражнение 9. Доказать неравенство (3.6).

Соотношение (3.6) называется ***законом Вальраса*** в широком смысле. Замена неравенства на равенство превращает соотношение в ***закон Вальраса в узком смысле***. Закон Вальраса в широком смысле означает, что в стоимостном выражении спрос не превосходит предложения при любых ценах $p \ge 0$, $p \ne 0$.

С использованием понятий функций совокупного спроса и предложения определение конкурентного равновесия можно переформулировать.

Определение. Набор (y^*, x^*, p^*) называется конкурентным равновесием если $x^* \in \Phi(p^*)$, $y^* \in \Psi(p^*)$, $x^* \le y^*$ и $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$.

Главным вопросом, возникающим при использовании модели Вальраса, является вопрос о существовании равновесия. Мы исследуем его для некоторого частного случая модели Вальраса, носящего называние модели Эрроу-Дербе [42].

3.1.2 Модель Эрроу-Дебре

Основное предположение этой модели состоит в конкретизации функции дохода потребителей $I(p)$. Помимо этого делаются предположения относительно технологических множеств и функции полезности. Некоторые из этих ограничений существенны, другие приняты для упрощения.

I. Для каждого потребителя i, $1 \le i \le l$, по сравнению с описанием модели Вальраса будем предполагать:

1. $K_i(p) = \langle p, b^i \rangle + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \langle p, y_j \rangle$,

   где b^i – начальный запас товаров, a_{ij} – доля доходов j-го производителя, которую получает i-й потребитель, $\sum_{i=1}^{l} a_{ij} = 1$ для любого j, y_j – чистый выпуск j-го производителя. Таким образом, мы предполагаем, что капитал потребителя складывается из дохода от продажи начального запаса и участия в прибыли производителей.
2. Множество $X_i \subseteq \mathbb{R}_+^n$, на котором определена функция полезности $u_i(x)$, выпукло, замкнуто и неограниченно. Если $\{x^k\} \in X_i$ и $x_j^k \underset{k \to \infty}{\to} \infty$, то $x_j^k \underset{k \to \infty}{\to} \infty$ для всех j. Смысл введения последнего предположения был объяснен в п. 1.1.
3. Функция полезности $u_i(x)$ непрерывна и вогнута на X_i.
4. Для любого i найдется такой вектор $\overline{x}^i \in X_i$, что $\overline{x}^i < b^i$. В частности, это означает, что каждый потребитель имеет ненулевые начальные запасы всех товаров.

5. Потребитель ненасыщаем.

II. Для производственного сектора предположим:

1. Множество чистых выпусков k-го производителя Y_k компактно и $0 \in Y_k$, $k = 1,...,m$.
2. Совокупное технологическое множество $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ выпукло.

Доказательство существования равновесия в модели Эрроу-Дебре опирается на следующее утверждение.

Лемма (Гейл [43]). Пусть $P = \{p \mid p \in \mathbb{R}^n_+, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\}$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $\varphi : P \to 2^{\Gamma}$ – многозначное отображение, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) φ - полунепрерывно сверху и для любого $p \in P$ образ $\varphi(p)$ является непустым выпуклым подмножеством в Γ;

2) выполняется закон Вальраса в широком смысле, т.е. $\langle p, u \rangle \geq 0$ при любом $u \in \varphi(p)$.

Тогда существует такой вектор $p^* \in P$, что $\varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing$.

Мы не будем приводить доказательство этой леммы, которое можно найти, например, в [2].

Теорема. В модели Эрроу-Дебре существует состояние равновесия.

Доказательство. Существование равновесия в модели Эрроу-Дебре доказывается приведением составляющих модели к такому виду, чтобы можно было использовать лемму Гейла. Для применения леммы Гейла необходимо построить многозначное отображение $\varphi : P \to 2^{\Gamma}$, обладающее указанными в лемме свойствами. Положим $\varphi(p) = \Psi(p) - \Phi(p)$, задав тем самым отображение $\varphi : P \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Теперь необходимо указать выпуклый компакт Γ, содержащий $\varphi(p)$ $\forall p \in P$.

Заметим, что $\Psi(p) \subseteq b + Y$. Кроме того, $\Phi(p) \subseteq \bigcup_i \tilde{X}_i(p)$, где $\tilde{X}_i(p)$ – определенное в (1.3) множество всех доступных потребителю товаров при ценах p. Ясно, что $\Phi(p) \subseteq \bigcup_i \bigcup_{p \in P} \tilde{X}_i(p)$. В предположении модели Эрроу-Дебре о распределении прибыли производителей между потребителями можно показать, что при всех i множество $\bigcup_{p \in P} \tilde{X}_i(p)$ ограничено. Это значит, что существует выпуклый компакт Φ_0, такой что

$$\Phi(p) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{p \in P} \tilde{X}_i(p) \subseteq \Phi_0 \quad \forall p \in P.$$

Если теперь положить $\Gamma = b + Y - \Phi_0$, то во-первых, Γ будет выпуклым компактом, а во-вторых, $\varphi(p) \in \Gamma \quad \forall p \in P$.

Полунепрерывность сверху отображения Φ_i, а также непустота, выпуклость и замкнутость множества $\Phi_i(p)$ следует из условия 4 для потребителя и выпуклости, замкнутости и ограниченности множества $\tilde{X}_i(p)$. В этом случае $\Phi(p)$ непусто выпукло и замкнуто, а отображение Φ полунепрерывно сверху. При выполнении условий 1 и 2 для производственного сектора то же можно утверждать и относительно Ψ. Тогда функция φ также полунепрерывна сверху, а $\varphi(p)$ является непустым выпуклым множеством при любом $p \in P$.

Применяя теперь лемму Гейла к функции φ, получаем, что существует такой вектор цен p^*, при котором множество $\varphi(p^*)$ содержит неотрицательный вектор u^*. Из определения φ получаем, что $u^* = y^* - x^*$, где $y^* \in \Psi(p^*)$, а $x^* \in \Phi(p^*)$, при этом $y^* \geq x^*$. Таким образом, при ценах p^* спрос не превосходит предложения. В силу ненасыщаемости потребители при максимизации ими функций полезности тратят весь свой капитал, т.е. $\langle x, p \rangle = K_i(p)$, $i = 1,...,l$. Отсюда следует, что $\langle x, p \rangle = \langle y, p \rangle$ для любых $x \in \Phi(p)$ и $y \in \Psi(p)$. Таким образом, мы доказали существование равновесия в модели Эрроу-Дебре.

Упражнение 10. Пусть в модели Эрроу-Дебре $l = 1$, $n = 2$, *технологическое множество производственного сектора имеет вид* $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \in [0,1], y_2 = 0\}$. *Функция полезности потребителя*

$u(x_1,x_2)=x_1+\sqrt{x_2}$ *определена на множестве* $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2 \,\|x_1-x_2|\le 1\}$. *Весь доход производителя* $p_1y_1+p_2y_2$ *поступает в распоряжение потребителя. Доказать, что в этой модели конкурентного равновесия не существует.*

Заметим, что доказанная теорема утверждает только существование равновесия, но не утверждает его единственности. Это значит, что может существовать несколько положений равновесия, поэтому возникает естественный вопрос об изучении их свойств. Главным свойством конкурентного равновесия является его парето-оптимальность [15, 16, 30]. Понятие оптимальности по Парето (или эффективности) можно объяснить так. Допустимое множество векторов потребления оптимально по Парето, если не существует другого допустимого множества векторов потребления такого, что для всех потребителей полезность потребления, по крайней мере, не меньше, а хотя бы для одного – строго больше.

Парето-оптимальность конкурентного равновесия означает, что распределение благ между потребителями нельзя улучшить сразу для всех. Это есть математическое выражение первой теоремы теории благосостояния: конкурентный рынок обеспечивает такое производство и распределение благ, которое не может быть улучшено никаким планированием или регулированием.

Однако более интересный факт состоит в том, что любое оптимальное по Парето распределение благ, которого можно достичь за счет перераспределения доходов (например, введением налогов), может входить в конкурентное равновесие. Это есть математическое выражение второй теоремы благосостояния: вторичное перераспределение доходов не нарушает эффективности конкурентной экономики.

Естественное желание использовать модель Вальраса для описания рыночных механизмов наталкивается на определенные трудности. Первая из них связана с тем, что в реальности не реализуются условия совершенной конкуренции. Однако это не самое существенное. Эффективность конкурентного равновесия означает, что имеющиеся производственные факторы используются полностью и, значит, если такое равновесие имеет место, то в экономике должна ощущаться нехватка каких-либо факторов производства – трудовых или природных ресурсов, либо основных фондов. Если подобное явление не наблюдается, но рынки функционируют, и экономические агенты действуют согласовано, то, значит, реализующееся в экономике равновесие не является эффективным. Неэффективность равновесия означает, что нарушаются какие-либо из предположений модели Вальраса. Основным таким предположением, нарушение которого может привести к отсутствию эффективности, является предположение о существовании в экономике единых цен – производители и потребители оценивают все товары одинаково. Систематическая разница между покупными и продажными ценами может возникать, например, за счет налогов акцизного типа, за счет торговой наценки, наличия транзакционных издержек. Существование и эффективность равновесия в этих и других условиях подробно исследована в [9].

3.1.3 Модель динамического равновесия

Естественным развитием идей общего равновесия является построение динамических моделей вальрасовского типа. Формальное обобщение модели Вальраса на динамический случай не представляет большого труда, однако исследование свойств такой модели оказывается гораздо более сложным.

Пусть экономическая система, в которой существует n типов товаров, функционирует во времени, разделенном на периоды $[0,1]$, $[1,2],...,[t,t+1],...$. Мы будем различать два случая – когда число периодов T конечно и когда оно бесконечно.

Производственный сектор в промежутке $[t,t+1]$ характеризуется технологическим множеством $Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$, каждый элемент которого $(x,y) \in Z_t$ представляет собой технологический процесс, осуществляющий выпуск вектора $y \in \mathbb{R}_+^n$ продуктов при материальных затратах $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Потребительский сектор представлен функцией совокупного спроса $\Phi_t : \mathbb{R}_+^n \to 2^{\mathbb{R}_+^n}$, которая каждому вектору цен $p_t \in \mathbb{R}_+^n$ на товары в периоде $[t,t+1]$ ставит в соответствие множество $\Phi_t(p_t) \in \mathbb{R}_+^n$ наиболее предпочтительных наборов продуктов. Будем считать, что на полуинтервале $[t, t+1)$ цены p_t постоянны, а в момент $t+1$ сменяются вектором p_{t+1}.

Реализация технологического процесса $(x, y) \in Z_t$ состоит в том, что вектор x производственных затрат приобретается по ценам p_t периода $[t, t+1)$, а произведенная продукция продается по ценам p_{t+1} следующего периода. Тогда прибыль технологического процесса равна $\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle$.

В соответствии с концепцией общего равновесия будем считать, что каждый участник экономической системы действует согласно собственным интересам, ориентируясь только на цены текущего периода:

- потребительский сектор формирует совокупный спрос $c_t \in \Phi_t(p_t)$,
- производственный сектор в период $[t, t+1]$ решает задачу планирования производства с целью максимизации прибыли: $\max\limits_{(x,y)\in Z_t} (\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle)$, одно из решений которой (x_t, y_{t+1}) в итоге реализуется.

Действия участников экономической системы согласуются посредством последовательности векторов цен на товары $p_1, p_2, \ldots, p_t, \ldots$.

Определение. Последовательность векторов $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$, $t = 0, \ldots, T$, называется (конечной) равновесной траекторией с началом y_0, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $c_t \in \Phi_t(p_t)$, $t = 0, \ldots, T$;

2) $(x_t, y_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \ldots, T-1$;

3) $\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \geq \langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle$ для любых $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \ldots, T-1$;

4) $c_t \leq y_t - x_t$, $t = 0, \ldots, T$;

5) $\langle p_t, c_t \rangle = \langle p_t, y_t - x_t \rangle$, $t = 0, \ldots, T$,

6) $\langle p_T, x_T \rangle = 0$.

Условия 1)-3) выражают предположения о поведении участников рассматриваемой экономической системы. Условия 4), 5) выявляют регулирующую функцию равновесных цен: условие 4) означает, что спрос не должен превосходить имеющегося запаса товаров, а условия 5) представляет динамический аналог закона Вальраса. Условие 6) является техническим, его необходимость обусловлена конечностью рассматриваемого периода. Если исключить условие 6), то получится определение бесконечной равновесной траектории.

Понятие равновесной траектории имеет следующую интерпретацию. В каждый период времени $[t,t+1]$ участники экономической системы принимают решение о разделении произведенного продукта на две компоненты: x_t, которая будет направлена на производственные нужды, и $s_t = y_t - x_t$, которая пойдет на потребление при условии потребности потребления c_t. Равновесные цены p_t согласуют индивидуальные действия участников экономической системы таким образом, чтобы выполнялись материальный и стоимостной балансы.

Заметим, что условие 3) выполняется тогда и только тогда, когда для любых промежуточных моментов времени t_1 и t_2, $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, имеет место неравенство:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t - x_t \rangle \ge \sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y'_t - x'_t \rangle \tag{3.7}$$

для всех $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = t_1,...,t_2 - 1$, $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$. Действительно, просуммировав неравенства из условия 3), получим

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \right) \ge \sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle \right).$$

Записав это неравенство в эквивалентном виде:

$$-\left\langle p_{t_1}, x_{t_1} \right\rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} \left(\langle p_t, y_t - x_t \rangle \right) + \left\langle p_{t_2}, y_{t_2} \right\rangle \ge$$

$$\ge -\left\langle p_{t_1}, x'_{t_1} \right\rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} \left(\langle p_t, y'_t - x'_t \rangle \right) + \left\langle p_{t_2}, y'_{t_2} \right\rangle$$

и прибавив к обеим частям слагаемое $\left\langle p_{t_1}, y_{t_1}\right\rangle - \left\langle p_{t_2}, x_{t_2}\right\rangle$ с учетом равенств $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$, получим неравенство (3.7).

Неравенство (3.7) говорит о том, что равновесная траектория является оптимальной с точки зрения производственного сектора при его стремлении к максимизации суммарной прибыли за период $[t_1, t_2]$ среди всех траекторий с начальным запасом y_{t_1} и обеспечивающих объем производства x_{t_2}.

При $t_1 = 0$ и $t_2 = T$ получаем, что «производственная составляющая» (x_t, y_t), $t = 0,...,T$, всякой равновесной траектории является решением задачи

$$\max_{(x'_t, y'_t)\in Z_t} \sum_{t=0}^{T} \left\langle p_t, y'_t - x'_t \right\rangle$$

при начальном условии $y'_0 = y_0$. Также верно и обратное утверждение.

Как и для статического случая модели Вальраса, здесь возникает вопрос о существовании равновесных траекторий. Оно обеспечивается при выполнении определенных условий.

Сделаем следующие предположения.

1. Отображения $\Phi_t(p)$ определены при любых $p \in \mathbb{R}^n_+$ и полунепрерывны сверху; множества $\Phi_t(p)$ выпуклы при любом p и ограничены в совокупности при $p \in \mathbb{R}^n_+$.
2. Существует число $\beta > 0$ такое, что неравенство $\left\langle p, c \right\rangle \le \beta$ выполняется при всех $p \in \mathbb{R}^n_+$ и $c \in \Phi_t(p)$, $t = 0,1,2,...$.
3. Множества Z_t замкнутые и выпуклые в $\mathbb{R}^{2n}_+$, $(0,0) \in Z_t$, Z_t ограничены в совокупности при $t = 0,1,2,...$.
4. Существует последовательность $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0,1,2,...$, для которой $\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \ge \tilde{s} > 0$, где $\tilde{s}$ фиксированный вектор, $t = 1,2,...$;
5. $y_0 > 0$.

Требование 1 можно трактовать таким образом, что потребительский сектор формирует свой спрос, не считаясь с возможностями производства, но в разумных пределах. Неравенство 2 означает, что доход потребителей всегда не превышает определенной величины. Условие 3 делает невозможным неограниченный рост объемов производства. Ограничения 4 и 5 предполагают продуктивность технологий при условии положительного начального запаса.

Теорема. При выполнении условий 1-5 для любого конечного T существует равновесная траектория с началом y_0.

Теорема. При выполнении условий 1-5 существуют бесконечные равновесные траектории для любого $y_0 > 0$.

Определение. Равновесная траектория $\{p_t^*, c_t^*, x_t^*, y_t^*\}$ называется эффективной, если для любой допустимой последовательности (c_t, x_t, y_t) (для нее выполняются условия 2 и 4 при $t = 0,1,2...$), исходящей из $y_0 = y_0^*$, найдется такой номер $\hat{t}$, что для всех $r \geq \hat{t}$ выполняется неравенство $\sum_{t=0}^{r} \left\langle p_t^*, c_t^* - c_t \right\rangle \geq 0$.

Для бесконечных траекторий выполняется магистральное свойство – при определенных условиях все бесконечные эффективные траектории, независимо от начального состояния, близки друг к другу при больших t, а конечные равновесные траектории могут существенно отличаться друг от друга в начале и в конце периода $[0, T]$.

3.2 Модели роста

Существенным требованием существования равновесной траектории в модели динамического равновесия являлось условие ограниченности объема производства и, соответственно, объем потребления также оказывается ограниченным. Подобные гипотезы не могут быть верными долго – реальные экономические системы на протяжении всего своего исторического развития демонстрируют устойчивую тенденцию к росту. Это наблюдение привело к построению моделей роста – моделей экономических систем специального вида.

3.2.1 Модель, учитывающая эндогенный научно-технический прогресс

Рассмотрим односекторную замкнутую экономику, динамика которой определяется тем, в какой пропорции делится национальный доход Y между капиталовложениями на расширение основных фондов и на улучшение производства («на науку»). Будем для простоты считать, что потребление отсутствует (или можно предполагать, что норма потребления фиксирована). Относительно воздействий вложений «в науку» примем идею прогресса, нейтрального по Хиксу, т.е. будем считать, что объем производства изменяется в соответствии с производственной функцией

$$Y = A(Q)F(K,L).$$

Здесь Q – суммарный объем капиталовложений в НТП, $A(Q)$ – мультипликатор прогресса, показывающий эффективность вложений, K – объем основных фондов, L – объем трудовых затрат.

Будем считать производственную функцию неоклассической с разделяющимися переменными, т.е. $F(K,L) = g(K)h(L)$. На мультипликатор $A(Q)$ также наложим ограничения:

$$A'(Q) > 0,\ A''(Q) < 0,\ A(0) = 1,$$

$$\lim_{Q\to\infty} A(Q) = \infty,\ \lim_{Q\to\infty} A'(Q) = 0,\ \lim_{Q\to 0} A'(Q) = \infty.$$

Пусть $u \in [0,1]$ – норма накопления, т.е. доля национального дохода Y, направляемая на увеличение основных фондов. Тогда

$$K' = uY = uA(Q)g(K)h(L). \tag{3.8}$$

Величина $(1-u)$ представляет собой долю национального дохода, направляемого «в науку»:

$$Q' = (1-u)Y = (1-u)A(Q)g(K)h(L). \tag{3.9}$$

Относительно трудовых ресурсов будем считать, что

$$L' = p(L), \tag{3.10}$$

где $p(L)$ – некоторая заданная функция изменения объема трудовых ресурсов, такая, что объем трудовых ресурсов не может стать бесконечным за конечное время.

Поведение описанной экономической системы описывается траекторией $(K(t),Q(t),L(t))$, которая может быть определена из системы уравнений (3.8)-(3.10) при заданном начальном состоянии (K_0, Q_0, L_0) и управлении $u(t) \in [0,1]$. В качестве критерия оптимальности траектории выберем самый простой – он отвечает задаче быстродействия [1]: за кратчайшее время достигнуть заданного уровня $\bar{K}$ основных фондов. Это значит, что терминальное многообразие в нашей задаче задается уравнением $K - \bar{K} = 0$.

Задача быстродействия обладает тем свойством, что если оптимальная траектория с началом x^0 проходит через точку x^1, то отрезок этой траектории с началом x^1 до терминального многообразия также будет оптимальным. Это значит, что оптимальное управление в каждой точке фазовой плоскости зависит только от координат этой точки. Поэтому естественно искать управление не в виде $u(t)$, а в виде синтезирующего управления $u(x)$, так что будем искать решение задачи (3.8)-(3.10) в виде $u(K, Q, L)$.

Стандартным способом решения задачи оптимального управления является использование принципа максимума Понтрягина [1, 4, 38]. Функция Гамильтона для задачи быстродействия с условиями (3.8)-(3.10) имеет вид

$$H = \psi_1 uY + \psi_2 (1-u)Y + \psi_3 p(L),$$

где $Y = A(Q)g(K)h(L)$, а ψ_1, ψ_2, ψ_3 – сопряженные переменные к уравнениям (3.8)-(3.10) соответственно. Выпишем сопряженную систему:

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial K} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial K},$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial Q} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial Q},$$

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_1 u \frac{\partial Y}{\partial L} - \psi_2 (1-u) \frac{\partial Y}{\partial L} - \psi_3 p'(L)$$

и условия трансверсальности: $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = \psi_3(T) = 0$.

Мы опустим детальное исследование сопряженной системы, которое можно найти в [2], а приведем лишь его результаты. В поставленной задаче существует единственная оптимальная траектория для любого начального состояния (K_0, Q_0, L_0) и любого $\bar{K} > K_0$, оптимальный синтез которой описывается выражением:

$$u(K,Q,L)=\begin{cases}1, & \text{если } (K,Q) \text{ выше } \Lambda,\\ 0, & \text{если } (K,Q) \text{ ниже } \Lambda,\\ u^*, & \text{если } (K,Q)\in\Lambda.\end{cases} \qquad (3.11)$$

Здесь $u^*=\dfrac{\tilde{A}'(Q)}{(\tilde{A}'(Q)+\tilde{g}'(K))}$, $\tilde{A}(Q)=A(Q)/A'(Q)$, $\tilde{g}(K)=g(K)/g'(K)$; Λ – кривая, составленная из особой кривой (сплошная линия на рис. 3) $\dfrac{A(Q)}{A'(Q)}=\dfrac{g(K)}{g'(K)}$ при $0\le K\le K_P$ и кривой переключения (штриховая линия на рис. 3) $Q=\tilde{A}^{-1}\left(g(K)\int\limits_{K}^{\bar{K}}\dfrac{dK}{g(K)}\right)$ при $K\ge K_P$, K_P – корень уравнения $\dfrac{1}{g'(K)}=\int\limits_{K}^{\bar{K}}\dfrac{dK}{g(K)}$.

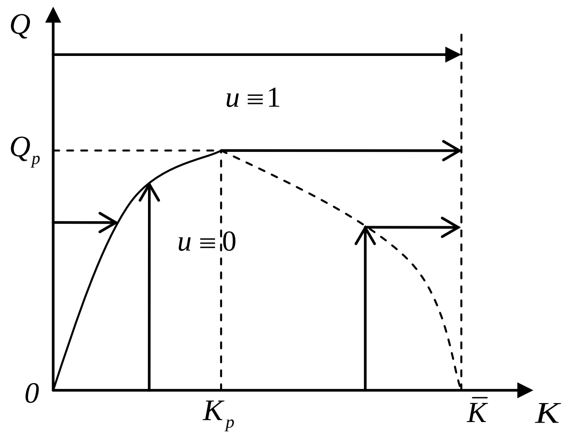

Рис. 3

Таким образом, из точки (K_0,Q_0,L_0) фазового пространства идет единственная траектория, удовлетворяющая принципу максимума. Можно показать, что в рассматриваемой задаче существует единственная оптимальная траектория для любого начального состояния (K_0, Q_0, L_0) и любого $\bar{K} > K_0$. Отсюда следует, что формула (3.11) описывает оптимальный синтез управления в задаче (3.8)-(3.10).

Обсудим экономический смысл выписанного решения. Типичной является ситуация, когда K_0 много меньше $\bar{K}$. В этом случае траектория выходит на особую поверхность и движется по ней до пересечения с поверхностью переключения, после чего сходит с особой поверхности. Можно показать, что величина K_p неограниченно растет с ростом $\bar{K}$. Это, в свою очередь, означает, что при увеличении $\bar{K}$ отрезок времени, в течение которого оптимальная траектория находится на особой поверхности, неограниченно увеличивается, т.е. в данном случае особая кривая играет роль магистрали.

Уравнение магистрали $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial Q}$ имеет следующую экономическую интерпретацию: на этой поверхности, и только на ней, предельная фондоотдача (норма эффективности накопления) и норма эффективности капиталовложений в научно-технический прогресс равны. Следовательно, оптимальное управление подчиняется такому правилу: если цель достаточно удалена, то все капиталовложения следует направлять в ту область, где норма эффективности больше. На магистрали капиталовложения должны распределяться в такой пропорции, чтобы равенство норм эффективности сохранялось тождественно.

Интересен факт, что уравнение особой поверхности и оптимальное управление на ней сохраняются для обширного класса целевых функций. Например, за кратчайшее время достигнуть заданную величину выпуска $\bar{Y}$. В этом случае меняется лишь терминальное многообразие, которое в данном случае имеет вид $Y(Q, K, L) = \bar{Y}$.

3.2.2 Модель Рамсея

Теперь обратимся к модели роста, учитывающей изменение потребления, являющейся одним из вариантов модели, предложенной Ф. Рамсеем [46].

Рассмотрим односекторную экономику, в которой совокупность независимых производителей, выпускает однородный продукт (состоящий как бы из одного продукта). Обычно под однородным продуктом понимают национальный доход, т.е. чистый материальный общественный продукт. Национальный доход представляет собой часть валового продукта, которая пошла на потребление и накопление.

Весь произведенный продукт $Y(t)$ распределяется между потребителями в количестве $C(t)$ в единицу времени и производителями, использующими его для образования новых производственных мощностей в количестве $J(t)$. Таким образом, должен соблюдаться баланс

$$Y(t) = C(t) + J(t). \tag{3.12}$$

Производственные возможности производителей задаются производственной функцией

$$Y(t) = M(t) f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right), \tag{3.13}$$

полученной нами в п. 2.2 (см. (2.8)).

Потребление здесь представляет все непроизводственное потребление как отдельных лиц, так и государства, включающее затраты на оборону, образование и т.п. Под капиталовложениями понимаются средства, направленные на увеличение основных производственных фондов, которые мы отождествляем с производственными мощностями.

Изменение производственных мощностей отражается в изменении масштабного фактора мощности $M(t)$ в (3.13). Для простоты будем считать, что увеличение мощности пропорционально инвестициям, но при этом в результате разрушения и старения часть мощности исчезает с постоянным ***темпом выбытия*** μ. Таким образом, уравнение изменения мощности имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{J(t)}{b} - \mu M(t). \tag{3.14}$$

Появление в уравнении (3.14) коэффициента b, называемого ***приростной фондоемкостью***, объясняется соображениями размерности.

Будем считать, что второй производственный фактор – однородная рабочая сила $L(t)$ – составляет постоянную долю населения страны, которое растет с темпом n. Таким образом,

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \frac{dL(t)}{dt} = nL(t). \tag{3.15}$$

Справедливость подобного описания изменения рабочей силы подробно обсуждается в [31].

Таким образом, динамика экономической системы описывается траекторией $\{L(t), M(t), Y(t), J(t), C(t)\}$, удовлетворяющей уравнениями (3.12)-(3.15), к которым следует добавить описание механизма распределения дохода между потреблением и накоплением. Для этого удобно ввести показатель нормы накопления $s(t) = J(t)/Y(t)$, $0 \le s(t) \le 1$. Тогда

$$J(t) = s(t)Y(t), \qquad C(t) = (1 - s(t))Y(t). \tag{3.16}$$

Обычно предполагается, что начальные значения $L(0) = L_0$ и $M(0) \overset{def}{=} M_0$, а также темп роста населения n заданы. При таком подходе[10] нам предстоит выбрать в каком-то смысле наилучшую норму накопления, поскольку она осталась единственной свободной переменной.

Сначала исследуем различные траектории модели (3.12)-(3.16). Перейдем к новым переменным – фондовооруженности труда $k(t) = \dfrac{bM(t)}{L(t)}$ и потреблению на душу населения $c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)}$. Тогда $\dfrac{Y(t)}{L(t)} = \dfrac{M(t)}{L(t)} f\left(\dfrac{L(t)}{M(t)}\right) = \dfrac{k(t)}{b} f\left(\dfrac{b}{k(t)}\right) \overset{def}{=} \tilde{f}(k(t))$ и

[10] Существует другой вариант этой задачи, в ней исходят не из нормы накопления, а непосредственно из величины потребления. Однако это требует задания некоторой функции полезности [12].

$$\frac{dk(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{bM(t)}{L(t)}\right)=b\frac{M'(t)L(t)-M(t)L'(t)}{L^2(t)}=\frac{bM'(t)}{L(t)}-bM(t)n$$
$$=\frac{J(t)}{L(t)}-b(\mu+n)\frac{M(t)}{L(t)}=\frac{s(t)Y(t)}{L(t)}-(\mu+n)k(t)=$$
$$=s(t)\tilde{f}(k(t))-(\mu+n)k(t).$$

Обозначив для краткости $\lambda=n+\mu$, получим, что модель (3.12)-(3.16) принимает вид:

$$\frac{dk(t)}{dt}=s(t)\tilde{f}(k(t))-\lambda k(t), \tag{3.17}$$

$$c(t)=(1-s(t))\tilde{f}(k(t)), \tag{3.18}$$

$$k(0)\overset{def}{=}k_0=\frac{bM_0}{L_0}, \qquad 0\le s(t)\le 1. \tag{3.19}$$

Заметим, что каждой траектории модели (3.17)-(3.19) можно сопоставить траекторию модели (3.12)-(3.16). Мы не будем конкретизировать вид производственной функции, а только изучим свойства траекторий модели (3.17)-(3.19).

Сначала рассмотрим самый простой случай. Пусть доля накопления является постоянной: $s(t)\equiv s=const$. Найдем стационарные (равновесные) точки уравнения (3.17), т.е. такие значения $\bar{k}$, что при $k_0=\bar{k}$ решением уравнения (3.17) будет функция $k(t)\equiv\bar{k}$. Для того чтобы найти все такие $\bar{k}$, надо найти все решения уравнения $\frac{dk(t)}{dt}=0$, или

$$s\tilde{f}(k)-\lambda k=0. \tag{3.20}$$

На рис. 4 представлено взаимное расположение кривых, точки пересечения которых определяют решения уравнения (3.20). Форма кривой $s\tilde{f}(k)$ определяется неоклассическими условиями для производственной функции. Нетрудно видеть, что существует не более двух решений уравнения (3.20). Одно решение, $\bar{k}=0$, существует всегда, при любых значениях s и λ и любой производственной функции, удовлетворяющей неоклассическим условиям, так как $f(0)=0$.

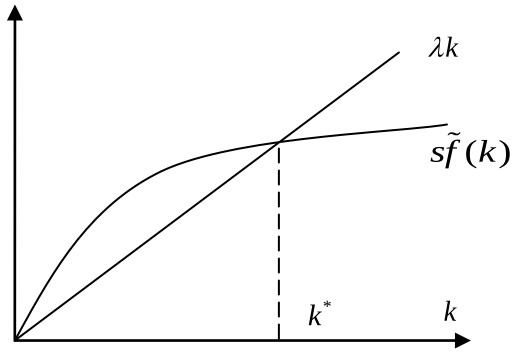

Рис. 4

Второе решение $\bar{k}=k^*>0$ существует не всегда. Оно отсутствует, если неравенство

$$s\tilde{f}(k)<\lambda k, \tag{3.21}$$

или

$$s\tilde{f}(k)>\lambda k \tag{3.22}$$

выполняется для любых $k>0$. Выясним, когда возможны такие ситуации.

Для того чтобы неравенство (3.21) выполнялось при всех $k>0$, необходимо, чтобы оно выполнялось и при малых значениях k, для которых справедливо $s\tilde{f}(k)\approx s(f(0)+k\tilde{f}'(0))$. В силу того, что $\tilde{f}(0)=0$ для выполнения неравенства (3.21) необходимо, чтобы $sk\tilde{f}'(0)<\lambda k$. Это условие также является и достаточным, поскольку в силу $\tilde{f}''(k)<0$ выполнено $\tilde{f}'(k)<\tilde{f}'(0)$ и $\tilde{f}(k)<k\tilde{f}'(0)$. В свою очередь, это означает, что $s\tilde{f}(k)<sk\tilde{f}'(0)<\lambda k$ для всех $k>0$.

Таким образом, условие (3.21) означает ограниченность производной производственной функции в точке 0, что неверно для неоклассических производственных функций (см. (1.9)).

Теперь рассмотрим возможность выполнения условия (3.22). Только что проведенный анализ показывает, что при малых значениях k должно выполняться $\varphi(k) \overset{def}{=} s\tilde{f}(k) - \lambda k > 0$.

Для неоклассической производственной функции в силу правила Лопиталя $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\tilde{f}(k)}{k} = 0$, поэтому неравенство $\varphi(k) > 0$, эквивалентное неравенству $\dfrac{\tilde{f}(k)}{k} > \dfrac{\lambda}{s}$, не может выполняться для всех $k > 0$. В силу непрерывности $\varphi(k)$ это означает, что существует значение k^* такое, что $s\tilde{f}(k^*) = \lambda k^*$. Из того, что $\tilde{f}''(k) < 0$ следует, что $\varphi''(k) < 0$, т.е. функция $\varphi(k)$ является вогнутой. Таким образом, значение k^* единственно.

Теперь проанализируем общую качественную картину поведения траекторий модели (3.17)-(3.19).

Поскольку $s\tilde{f}(k) - \lambda k > 0$ для любого значения $0 < k < k^*$, то для всех таких точек $\dfrac{dk(t)}{dt} > 0$, т.е. значение $k(t)$ будет увеличиваться до тех пор, пока не достигнет k^*. При $k > k^*$, напротив, $\dfrac{dk(t)}{dt} < 0$, т.е. значение $k(t)$ будет уменьшаться, пока не достигнет k^*. Таким образом, при любом начальном значении $k_0 > 0$ траектории уравнения (3.17) стремятся к k^*. Это означает, что точка $k = k^*$ является устойчивой равновесной, т.е. к ней стремиться любая траектория. Если $k = k^*$ для модели (3.17)-(3.19), то для модели (3.12)-(3.16) имеем:

$$M(t) = \frac{k(t)L(t)}{b} = \frac{1}{b} k^* L_0 e^{nt}, \quad Y(t) = L(t)\tilde{f}(k(t)) = \tilde{f}(k^*) L_0 e^{nt},$$

$$C(t) = (1-s)\tilde{f}(k^*) L_0 e^{nt}, \quad J(t) = sL_0 e^{nt}.$$

Таким образом, все переменные растут с одинаковым темпом. Такую ситуацию называют ***режимом сбалансированного роста***. Для описанной модели он обладает тем свойством, что к нему сходятся все траектории модели при постоянной норме накопления. Естественно, что сам режим сбалансированного роста зависит от величины нормы капиталовложений s. При этом возникает вопрос о том, какой режим сбалансированного роста предпочтительнее. Для этого необходимо ввести критерий оценки траекторий модели. Одним из таких критериев является повышение удовлетворения потребностей общества. В этом случае оценкой различных режимов сбалансированного роста является уровень потребления на одного трудящегося, т.е. величина c. При сбалансированном росте $c=(1-s)\tilde{f}(k^*)$, причем значение k^* зависит от s. Эта зависимость определяется соотношением (3.20), поэтому

$$c(s)=\tilde{f}(k^*(s))-\lambda k^*(s).$$

Условие экстремума этой функции во внутренней точке отрезка $[0,1]$, к которому принадлежат допустимые значения управления s, имеет вид

$$\frac{d}{ds}(\tilde{f}(k^*(s))-\lambda k^*)=0 \text{ или } (\tilde{f}'(k^*)-\lambda)\frac{dk^*(s)}{ds}=0.$$

Из условия (3.20) в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\tilde{f}(k)}{k}=0$, $\dfrac{dk^*(s)}{ds}>0$, необходимое условие максимума имеет вид $\tilde{f}'(k^*)=\lambda=n+\mu$ Это соотношение носит название ***правила золотого накопления, или правила Солоу***.

Мы нашли оптимальное решение в классе решений, представляющих собой режимы сбалансированного роста с постоянной нормой накопления. Теперь рассмотрим переменное управление $s(t)$. Примем, что все моменты времени равноправны и будем оценивать траекторию средним значением потребления за достаточно большой промежуток времени T, называемый ***горизонтом планирования:***

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L(t)}e^{-\delta t}dt. \tag{3.23}$$

Так мы приходим к задаче оптимального управления: найти решение системы (3.12)-(3.16), удовлетворяющее заданным начальным условиям $L(0)=L_0$, $M(0)=M_0$ и доставляющее максимум функционалу (3.23).

Переходя к переменным фондовооруженности и потреблению на душу населения, получаем следующую задачу.

Найти максимум функционала

$$\int_0^T \tilde{f}(k(t))\big(1-s(t)\big)e^{-\delta t}dt \qquad (3.24)$$

по множеству кусочно-непрерывных функций $s(t)$ и кусочно-дифференцируемых функций $k(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$s(t)\in\big[0,1\big], \qquad k(0)=\frac{bM_0}{N_0}>0, \qquad k(T)\ge k_T>0,$$

$$\frac{d}{dt}k(t)=s(t)\tilde{f}(k(t))-\big(\mu+n\big)k(t). \qquad (3.25)$$

Здесь мы дополнительно добавили ограничение на объем основных фондов. Решение задачи (3.24), (3.25) проводится на основе принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона имеет вид:

$$H=\psi_0(1-s(t))e^{-\delta t}f(k(t))+\psi(s(t)f(k(t))-\lambda k(t)).$$

Сопряженную переменную ψ_0 можно считать равной 1.

Упражнение 11. Показать, что если $\psi_0=0$*, то оптимальным будет управление* $s(t)\equiv 1$*. Дать интерпретацию этого условия.*

Если управление $s(t)$ оптимально, то в силу принципа максимума существует такая непрерывная функция $\psi(t)$, что выполнены условия (3.25) и

$$\psi'(t)=-\frac{\partial H}{\partial t}=-(1-s)e^{-\delta t}f'(k)-\psi(sf'(k)-\lambda),$$

функция $s(t)$ максимизирует выражение

$$(1-s)e^{-\delta t}+\psi s \qquad (3.26)$$

при ограничениях $s(t)\in\big[0,1\big]$ и $\psi(T)(k(T)-k_T)=0$.

Введя обозначение $q=\psi e^{\delta t}$, из (3.26) получаем, что

$$s(t)=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ q>1,\\ 0,\ \textit{если}\ q<1,\\ 0\le s(t)\le 1,\ \textit{если}\ \ q=1.\end{cases} \qquad (3.27)$$

Уравнение на сопряженную переменную принимает вид

$$q'(t)=(\delta+\lambda)q-(1-s+sq)f'(k)\,. \qquad (3.28)$$

Таким образом, если $s(t)$ – оптимальное управление, то оно удовлетворяет (3.27) и система уравнений

$$\begin{aligned}&k'(t)=sf(k)-\lambda k,\\&q'(t)=(\delta+\lambda)q-(1-s+sq)f'(k),\\&k(0)=k_0, k(T)\ge k_T,\\&q(t)(k(T)-k_T)=0\end{aligned} \qquad (3.29)$$

имеет решение.

Анализ системы (3.29) облегчается тем, что она автономна – в правые части уравнений не входит в явном виде время t. Для качественного исследования поведения системы найдем участки знакопостоянства производных $k'(t)$ и $q'(t)$. Рассмотрим два случая.

А. $q>1$. Тогда $q'(t)=(\delta+\lambda)q-qf'(k)$, и уравнение $q'(t)=0$ приводит к $f'(k)=\delta+\lambda$ Учитывая условия, накладываемые на неоклассическую производственную функцию, можно заключить, что это уравнение имеет единственное решение $k^*>0$. Уравнение $k'(t)=f(k)-\lambda k=0$ также дает единственный корень $\bar{k}>0$, причем $k^*<\bar{k}$, поскольку из условия убывания $f'(k)$:

$$f(k^*)=\int_0^{k^*} f'(k)>\int_0^{k^*}(\delta+\lambda)dk=(\delta+\lambda)k^*>\lambda k^*,$$

что вместе с требованием вогнутости $f(k)$ и равенством $f(\bar{k})=\lambda\bar{k}$ дает $k^*<\bar{k}$ Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}&q'(t)<0\ \ \textit{при}\ \ k<k^*,\ k'(t)>0\ \textit{при}\ \ k<\bar{k},\\&q'(t)=0\ \ \textit{при}\ \ k=k^*,\ k'(t)=0\ \textit{при}\ \ k=\bar{k},\ .\\&q'(t)>0\ \ \textit{при}\ \ k>k^*,\ k'(t)<0\ \ \textit{при}\ \ k>\bar{k}.\end{aligned}$$

В. $q < 1$. Тогда $q'(t) = (\delta + \lambda)q - f'(k)$, и уравнение $q'(t) = 0$ дает

$$q = \frac{f'(k)}{\delta + \lambda} > 0. \tag{3.30}$$

Кроме того, $k'(t) = -\lambda k < 0$.

Объединяя перечисленные варианты знакопостоянства производных $k'(t)$ и $q'(t)$, получаем четыре области, взаимное расположение которых изображено на рис. 5

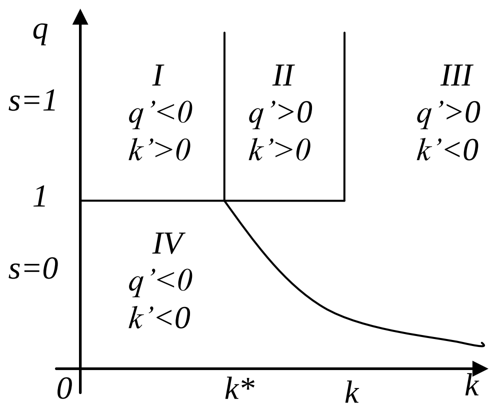

Рис. 5

Кривая, отделяющая области III и IV, задается уравнением (3.30).

Можно показать, что для различных вариантов расположения точки начальных условий $k(0) = k_0$ и $q(0) = q_0$ в каждой из областей существует единственная кривая $(k(t), q(t))$, являющаяся решением системы (3.29). Точка $(k^*, 1)$ – особая. Она обладает тем свойством, что придя в нее, траектория может оставаться в ней сколь угодно долго, поскольку она является общим корнем уравнений $k'(t) = 0$, $q'(t) = 0$. Для этого достаточно применять управление, определяемое системой уравнений

$$sf(k) - \lambda k = 0, \quad f'(k) = \delta + \lambda,$$

т.е. $s^* = \lambda \dfrac{k^*}{f(k^*)}$. Из условия, что $f(k^*) > \lambda k^*$, следует $0 < s^* < 1$. Таким образом, траектории, входящие в точку $(k^*, 1)$, не определяются полностью начальными условиями, поскольку время пребывания в этой точке зависит от управляющего субъекта. В случае $k_0 < \bar{k}$, $k_T > \bar{k}$ допустимых траекторий не существует. Поэтому будем рассматривать случай $k_0, k_T < \bar{k}$.

Для всех возможных вариантов расположения траектории можно определить время движения вдоль этой траектории, и тем самым получить верхнюю оценку T_0 времени прохождения любой из траекторий в зависимости от начальных и граничных условий.

Теорема. Пусть промежуток планирования T достаточно велик ($T > T_0$). Тогда если в задаче (3.24), (3.25) существуют допустимые траектории, то существует оптимальное управление $s(t)$, которое устроено следующим образом:

> в начальный период (при $0 \le t \le T^*$) и в конце (при $T^{**} \le t \le T$) $s(t)$ равно либо 0, либо 1. На участке $T^* \le t \le T^{**}$ $s(t) = s^*$. При этом T^* и T^{**} не зависят от T.

При достаточно больших значениях горизонта планирования оптимальное управление состоит в следующем. Сначала необходимо выбрать такое значение $s(t)$, чтобы как можно быстрее прийти в точку k^*, определяемую правилом Солоу. Затем в течение практически всего периода времени величина $s(t)$ должна быть равна s^*, а в конце периоде необходимо за минимальное время перевести систему из точки k^* в точку k_T. Таким образом, мы пришли к сбалансированному росту, причем сам факт выхода на траекторию сбалансированного роста не зависит ни от начального, ни от конечного значений. Это означает, что сбалансированный рост обладает магистральным свойством, а сформулированная теорема является аналогом теорем о магистралях, рассмотренных в п. 2.5.

Глава 4. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ

Equation Section (Next) В предыдущих главах мы рассмотрели общие подходы классической теории математической экономики к описанию действий и взаимодействий экономических агентов. Они представляют собой основу для построения практических математических моделей экономики, описывающих функционирование реальных экономических систем в определенных условиях. В то же время понятно, что модели равновесия и модели роста описывают идеализированную экономику. С одной стороны, реальные экономические системы никогда не находится ни в состоянии равновесия, ни в состоянии сбалансированного роста. С другой стороны, и современные проблемы экономики не укладываются в концепции экономического равновесия и роста. Поэтому для построения моделей, адекватно описывающих реальные экономические процессы, необходимо разработать более общие принципы описания экономики.

При построении модели в любой области исходят из определенных гипотез, которые со временем приобретают смысл некоторых фундаментальных принципов. Как было сказано во введении, в математической экономике таких основополагающих принципов пока еще нет. Соотношения моделей экономики носят эмпирический характер. Поэтому главная проблема математического описания экономических систем заключается в поиске некоторых общих, элементарных принципов описания математических явлений. Таким образом, главным подходом к построению практических моделей экономики является феноменологический подход.

С точки зрения анализа сложных систем экономическую систему можно определить как исторически сложившуюся совокупность условий производственной деятельности многих агентов. Эти условия выражаются производственными отношениями. Взаимодействие интересов в рамках сложившейся материальной и организационной структуры производства приводит к саморегулированию экономической системы. Через механизмы экономического саморегулирования, к которым относятся производственные отношения, отношения обмена и распределения благ, действуют своеобразные обратные связи, определяющие характер эволюции экономической системы.

Экономическая система подвержена управляющим воздействиям со стороны общественных и государственных организаций.

Как мы видели, основу математической модели экономической системы составляют описания структуры производства – сложные задачи описания технологических процессов. В силу сложности они должны быть схематизированы с сохранением общей сущности и с учетом выделения специфики. Все производственные процессы объединяет то, что они преобразуют исходные ресурсы в продукты производства и потребления.

Описания производства следует дополнить описанием механизмов регулирования процессов производства, к которым относятся модели поведения основных групп общества, участвующих в процессах производства, распределения материальных благ и в процессах обмена благами и их потребления.

Модели производства и механизмов экономического регулирования образуют замкнутое описание экономической системы при условии задания управляющих воздействий, которые являются стратегиями государственных учреждений. Все они в совокупности образуют модель управляемой экономической системы. Такая система моделей в принципе позволяет прогнозировать возможные структурные сдвиги в экономической системе в зависимости от принятых управляющих решений.

Однако практически реализовать такую возможность очень сложно. Сначала необходимо выработать надежные, проверенные эмпирически принципы математического описания экономических процессов и элементов экономики. Здесь возникает проблема проверки экономических гипотез. Поскольку экономика все время развивается, то повторная проверка результатов одного эксперимента проводится, вообще говоря, с другой системой. Для эмпирической проверки можно использовать данные о прошлом развитии экономики. Можно также считать, что модель подтверждается эмпирически, если она качественно воспроизводит эволюцию экономической системы.

В отделе математического моделирования экономических систем, руководимом академиком РАН А.А. Петровым, Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН разработан подход к моделированию экономических систем, названный ***сис-***

темным анализом развивающейся экономики (САРЭ). Этот подход основывается на следующих общих представлениях о природе экономических систем и общих принципах системного анализа экономики:

1. экономика является динамической самоорганизующейся системой, изменение состояния которой обусловлено, в основном, ее внутренними механизмами;
2. экономическая система обладает свойством целостности, поэтому выделение фрагмента системы для изучения должно осуществляться на основе модели системы в целом. Модель системы в целом состоит из описания процессов производства, обменов и потребления, в совокупности представляющих единый процесс общественного воспроизводства, и описаний экономических механизмов регулирования, отражающих производственные отношения. Эти описания замыкают модель, если зафиксировать параметры государственного управления экономикой;
3. процессы общественного воспроизводства складываются из элементарных процессов в многочисленных производственных единицах. Совокупные результаты элементарных процессов выражаются в агрегированных показателях экономического развития. По возможности макропоказатели и соотношения между ними должны быть выведены из исходных микроописаний элементарных процессов на основе обоснованных методов агрегирования;
4. результаты анализа модели необходимо сравнивать с качественными особенностями эволюции моделируемой системы.

Методология САРЭ предполагает, что описание экономической системы начинается с выделения экономических агентов, деятельность и отношения которых определяют структуру изучаемой экономики и ее эволюцию. Деятельность экономических агентов сводится к производству и потреблению материальных благ, обмену ими и их распределению. Выбор агента оказывает влияние на состояние агента, которое описывается некоторым набором показателей, отражающих результат предыдущей деятельности агента. К таким показателям относятся количества (запасы) материальных активов и финансовых инструментов (финансовых активов и обязательств). При построении модели набор активов и обязательств, описывающих состояние агентов, определяется одновременно с выделением агентов.

Материальные и финансовые активы и обязательства обладают одним важным свойством – они являются ***аддитивными величинами***. Вследствие этого процессы перераспределения любых активов и обязательств можно описать специальными уравнениями, называемыми ***уравнения балансов.*** Уравнения материальных балансов связывают изменения запасов материальных благ у экономических агентов с потоками обменов между ними. Согласование и контроль деятельности экономических агентов обеспечивает финансовая система, которая оперирует стоимостными эквивалентами результатов настоящей и будущей деятельности агентов: доходами, расходами, сбережениями, ссудами и т.д. Практически любому материальному потоку между агентами соответствует поток денежных платежей. Изменения финансовых активов и обязательств с потоками платежей описываются уравнениями финансовых балансов.

4.1 Материальные балансы

Пусть в модели рассматривается множество экономических агентов A. Предположим, что агенты потребляют и используют на производственные нужды множество продуктов $\mathcal{P}$ и множество ресурсов $\mathcal{R}$. Как и ранее (см. п. 1.2), мы считаем, что продукты производятся экономическими агентами, которые при этом затрачивают другие продукты и ресурсы. Ресурсы поступают агентам из внешней среды, которую мы не относим к рассматриваемой экономической системе. Деление всех благ на продукты и ресурсы условно и зависит от постановки задачи (при описании производства металла ресурсами будут руда и электроэнергия, при описании энергетической отрасли электроэнергия будет продуктом).

Для составления материальных балансов важно не то, относится благо к продуктам или ресурсам, а то, может ли оно передаваться от агента другим агентам. Если нет, то описание блага является элементом технологических, внутренних, ограничений агента и для него уравнение баланса составлять не нужно.

Будем рассматривать только те продукты и ресурсы, которыми агенты могут обмениваться. Такие блага будем называть товарами. Для описания передачи товаров будем считать, что в экономической системе в каждый момент времени запасы всех товаров целиком распределены между агентами. Получаем аддитивную характеристику экономической системы – запас $Q_i^a(t)$ товара $i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, имеющийся в распоряжении каждого агента $a \in A$ в каждый момент времени t. Запас товара может изменяться в результате:

- производства (для продуктов) или поступления из внешней среды (для ресурсов) в количестве $X_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- расходования на конечное потребление в количестве $C_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- текущих затрат на производство в количестве $V_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- капитальных затрат на производство в количестве $J_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- в результате передач товара между агентами a и b в количестве $X_i^{ab}(t)$ в единицу времени ($X_i^{ab}(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от направления передачи товара: $X_i^{ab}(t) > 0$ если товар передается от агента a агенту b). Товары передаются без потерь, т.е. $X_i^{ab}(t) = -X_i^{ba}(t)$.

Учитывая все перечисленные, получаем, что изменение запаса товара $Q_i^a(t)$ описывается уравнением:

$$\frac{dQ_i^a}{dt} = X_i^a - C_i^a - V_i^a - J_i^a - \sum_{b \in A} X_i^{ab}, \quad a \in A, \quad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что соотношению (4.1) удовлетворяют любые вещественные блага (автомобили, стулья, вода, нефть). Ограничением на использование таких товаров является условие неотрицательности их запасов: $Q_i^a(t) \geq 0$, $a \in A$, $i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$. Такие товары называются ***складируемыми***.

Однако запасов некоторых товаров (электроэнергия, труд) не существует физически (относительно электроэнергии это не совсем верно, так как существуют электрические аккумуляторы, однако запасы электроэнергии в них пренебрежимо малы по сравнению с объемом передачи по сетям). Ограничение на использование таких товаров состоит с том, что в каждый момент времени сумма затрат, потребления и передач таких товаров не должна превосходить их производства и поступлений из внешней среды. С учетом уравнения (4.1) это условие означает, что

$$\frac{dQ_i^a(t)}{dt} \geq 0, \qquad a \in A, \qquad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \tag{4.2}$$

Такие товары называются ***нескладируемыми***.

С помощью уравнений (4.1) и (4.2) также можно описать обмены многими видами услуг, если понимать аддитивность услуг следующим образом. В процессе обслуживания агент, предоставляющий услугу, не может обслуживать другого агента. Поэтому если включать в балансы услуги по их стоимости, они становятся аддитивным активом.

С помощью балансовых соотношений нельзя описать:

- общественные блага (в силу их неделимости) – общественную безопасность, затраты на сохранение окружающей среды;
- знания и информацию в силу того, что при передаче от одного агента другому каких-либо знаний, первый агент их не лишается.

Как правило, изменения запасов товаров у всех агентов несущественны (производители держат на складе то, что собираются реализовать в ближайшее время; потребители хранят только товары повседневного пользования; увеличение запасов часто является предвестником экономического кризиса, т.е. некоторых структурных изменений, – производители не могут реализовать произведенную продукцию, потребители запасаются продуктами питания и другими товарами), т.е. можно считать, что $\frac{dQ_i^a(t)}{dt} = 0$ в левой части (4.1). Если рассматривать чистые выпуски продуктов $Y_i^a = X_i^a - V_i^a$, то балансовые уравнения (4.1) примут вид

$$Y_i^a = C_i^a + J_i^a + \sum_{b \in A} X_i^{ab} \qquad a \in A, \qquad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \tag{4.3}$$

Понятно, что все реальные потоки благ нельзя ни учесть, ни отследить, ни зарегистрировать, поэтому возникает проблема ***агрегирования*** активов. Она состоит в том, чтобы свести наборы реальных активов в агрегаты, у которых сохранялось бы свойство аддитивности и за изменениями которых можно было бы наблюдать.

В экономике большинству передач товаров между агентами $X_i^{ab}(t)$ соответствует встречный поток денежных платежей $\Phi_i^{ba}(t)$, причем $\Phi_i^{ba}(t) = -\Phi_i^{ab}(t)$, $a,b \in A$, $i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$.

Потокам выпуска $X_i^a(t)$, текущих $V_i^a(t)$ и капитальных $J_i^a(t)$ затрат также соответствуют денежные потоки $\tilde{X}_i^a(t)$, $\tilde{V}_i^a(t)$, $\tilde{J}_i^a(t)$. Так как все финансовые данные регистрируются бухгалтерским учетом, то за ними легко наблюдать, собирая и анализируя соответствующую отчетность. Денежные потоки $\tilde{C}_i^a(t)$, соответствующие потокам потребления, оцениваются по доходам и расходам потребителей, остальные финансовые показатели отражаются в бухгалтерских балансах предприятий, организаций и государственном бюджете. Коэффициент пропорциональности между потоком платежей и встречным потоком товара представляет собой цену товара. При этом вся экономическая статистика базируется на предположении о том, что в каждый момент времени в экономике существуют единые для всех агентов цены:

$$\Phi_i^{ab} = p_i X_i^{ba},\ \tilde{C}_i^a = p_i C_i^a,\ \tilde{J}_i^a = p_i J_i^a,\ \tilde{X}_i^a = p_i X_i^a\ \ \tilde{V}_i^a = p_i V_i^a.$$

Систематическая разница цен (например, оптовых и розничных) объясняется наличием посредников, увеличивающих стоимость товара за счет дополнительно предоставляемых услуг, которые также входят в список рассматриваемых товаров.

В предположении о существовании в экономике единых цен в соответствии с материальным балансом (4.3) должен выполняться соответствующий баланс платежей:

$$\tilde{Y}_{\mathcal{P}}^a = \tilde{C}_{\mathcal{P}}^a + \tilde{J}_{\mathcal{P}}^a + \sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{b\in A}\Phi_i^{ba}, \qquad \tilde{Y}_{\mathcal{P}}^a = \tilde{X}_{\mathcal{P}}^a - \tilde{V}_{\mathcal{P}}^a. \tag{4.4}$$

Здесь выполнено суммирование финансовых балансов агента по всем продуктам. Величины, входящие в баланс, имеют вполне определенный экономический смысл: $\tilde{Y}_{\mathcal{P}}^a = \sum_{i\in\mathcal{P}}\tilde{Y}_i^a$ – ***добавленная стоимость***, $\tilde{J}_{\mathcal{P}}^a = \sum_{i\in\mathcal{P}}\tilde{J}_i^a$ – ***валовые инвестиции***, $\tilde{X}_{\mathcal{P}}^a = \sum_{i\in\mathcal{P}}\tilde{X}_i^a$ –

объем производства, $\tilde{V}_{\mathcal{P}}^{a} = \sum_{i \in \mathcal{P}} \tilde{V}_{i}^{a}$ – ***материальные затраты***. Эта интерпретация позволяет сопоставлять показатели состояния модельного агента с наблюдаемыми показателями хозяйственной деятельности реальных субъектов экономики.

Просуммировав балансы (4.4) по всем агентам из некоторого множества (например, находящимся в одной стране) $N \subseteq A$ и учтя тот факт, что взаимные платежи между агентами внутри этого множества уничтожатся, получим баланс

$$\tilde{Y}_{\mathcal{P}}^{N} + \tilde{I}_{\mathcal{P}}^{N} = \tilde{C}_{\mathcal{P}}^{N} + \tilde{J}_{\mathcal{P}}^{N} + \tilde{E}_{\mathcal{P}}^{N}, \tag{4.5}$$

где $\tilde{Y}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \tilde{Y}_{\mathcal{P}}^{a}$ – ***валовой внутренний продукт***, $\tilde{J}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \tilde{J}_{\mathcal{P}}^{a}$ – ***фонд накопления***, $\tilde{X}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \tilde{X}_{\mathcal{P}}^{a}$ – ***объем производства***, $\tilde{C}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \tilde{C}_{\mathcal{P}}^{a}$ – ***фонд потребления***, $\tilde{E}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \sum_{b \notin N} [\Phi_{\mathcal{P}}^{ba}]_{+}$ – ***экспорт***, т.е. сумма платежей от агентов вне множества N, $\tilde{I}_{\mathcal{P}}^{N} = \sum_{a \in N} \sum_{b \notin N} [\Phi_{\mathcal{P}}^{ab}]_{+}$ – ***импорт***, т.е. сумма платежей агентов группы N агентам, не входящим в эту группу. Баланс (4.5) носит название ***основного макроэкономического тождества***, его составляющие также регистрируются экономической статистикой.

Везде далее в этой главе мы уделяем значительное внимание терминологии для того, чтобы обеспечить возможность сопоставления модельных балансов с реальной бухгалтерской отчетностью предприятий, на основе которой определяются и макроэкономические данные.

Поскольку все экономические показатели являются стоимостными, то для оценки их динамики необходимо иметь возможность сравнивать показатели, рассчитанные для разных лет. Непосредственно такое сравнение можно производить, только если стоимость денежной единицы не меняется. Изменение стоимости денежной единицы выражается в том, что на одну и ту же сумму в разные моменты времени можно приобрести разное количество товаров. Другими словами, это означает изменение уровня цен.

Увеличение уровня цен называется ***инфляцией***, уменьшение – ***дефляцией***.

Для измерения уровня цен используется понятие ***индекса цен*** – отношения стоимости определенного набора товаров и услуг для заданного периода к стоимости такого же набора в некотором начальном периоде, который называется ***базовым***.

Пусть требуется определить индекс цен некоторой группы товаров $I \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$. Если группа является достаточно большой (например, более тысячи наименований), то в реальности уследить за изменением цен всех товаров группы довольно сложно. Поэтому выбирают представительную подгруппу $K \subseteq I$, по которой рассчитывают индекс всей группы I. Такая подгруппа называется ***корзиной***. Индекс цен в некоторый момент t относительно базового периода t_0 для группы I определяется следующим образом:

$$p_I = \frac{\sum_{i \in K} p_i(t) \sum_{a \in A} Z_i^a(\theta)}{\sum_{i \in K} p_i(t_0) \sum_{a \in A} Z_i^a(\theta)}.$$

Здесь p_i – цена товара i, а в зависимости от того, что понимают под Z_i^a, и от выбора момента времени θ, получаются разные индексы. При $Z_i^a = C_i^a$ получается ***индекс цен потребителей***, при $Z_i^a = X_i^a$ – ***индекс цен производителей***, при $Z_i^a = J_i^a$ – ***индекс капитальных затрат***. Можно выделять и более мелкие группы товаров, получая, соответственно, индексы цен продуктов питания или индекс оптовых цен.

Выбор момента времени θ определяет то, какой набор товаров берется за основу подсчета индекса. Если $\theta = t$, т.е. выбраны объемы товаров в текущем периоде, то получается ***индекс Пааше*** $p_{Пааше}$. Если $\theta = t_0$, т.е. выбраны объемы товаров в базовом периоде, получается ***индекс Ласпейреса*** $p_{Ласп}$. Для близких временных периодов эти индексы практически не отличаются. Однако для далеких периодов начинает сказываться постоянно происходящее изменение в структуре потребления и производства (если, например, в корзину входит товар «телевизор», то по сравнению с периодом тридцатилетней давности изменилась не только цена товара, но и существенно изменились объемы потребления). Для компенсации этого эффекта используют ***индекс Фишера*** $p_{Фиш} = \sqrt{p_{Пааше} \cdot p_{Ласп}}$.

Если возможно было бы измерить индекс цен по всем продуктам и ресурсам, обращающимся в экономике, то получился бы индекс цен ВВП, называемый ***дефлятором*** ВВП. На практике расчет дефлятора осуществляется экспертным взвешиванием индексов потребительских цен, индекса цен производителей и индекса капитальных затрат с последующей проверкой по производству и потреблению отдельных видов однородных продуктов.

Сравнения экономических показателей в разные моменты времени можно проводить, скорректировав их с учетом изменения цен, т.е. с учетом значения индексов цен. Показатели, рассчитанные в текущих ценах (в ценах на момент подсчета), называются ***номинальными***. Показатели, учитывающие рост или снижение цен, называются ***реальными***. В частности,

$$реальный\ ВВП = \frac{номинальный\ ВВП}{дефлятор\ ВВП}.$$

4.2 Схема межотраслевого баланса

Заметим, что все рассмотренные в главах 1-3 модели укладываются в предложенное описание, только к ним еще необходимо добавить соответствующие принципы оптимальности. Покажем, как в подобной схеме записывается модель Леонтьева.

Поскольку межотраслевой баланс представляется в разрезе чистых отраслей, то множество всех продуктов $\mathcal{P}$ разбивается на непересекающиеся группы I_k, $k = 1,...,n$, $\sum_{k=1}^{n} I_k = \mathcal{P}$, так, что ни один агент не производит продукты двух различных групп. Соответственно и агенты распределяются по группам так, что в группу J_k $k = 1,...,n$, попадают агенты, производящие продукты группы I_k. Группы J_k образуют чистые отрасли.

По определению чистой отрасли

$$X_i^{J_k} = X_i^A \text{ при } i \in I_k \text{ и } X_i^{J_k} = 0 \text{ при } i \notin I_k,\ i \in \mathcal{P},\ k = 1,...,n. \quad (4.6)$$

Как и в модели Леонтьева, будем считать, что отрасли не имеют конечного потребления и не делают капитальных затрат. Кроме того, пренебрежем приростом запасов продуктов. Тогда

$$\frac{dQ_i^{J_k}}{dt}=0,\ C_i^{J_k}=0,\ J_i^{J_k}=0,\qquad i\in P\,,\qquad k=1,...,n\,. \tag{4.7}$$

Агентов, не производящих продукты, объединим в отдельную группу J_0. Относительно агентов этой группы будем считать, что они являются чистыми потребителями и также не накапливают запасов. Тогда

$$\frac{dQ_i^{J_0}}{dt}=0,\quad X_i^{J_0}=0,\quad V_i^{J_0}=0,\qquad C_i^{J_0}=C_i^A,\quad J_i^{J_0}=J_i^A,\quad i\in\mathcal{P}\,. \tag{4.8}$$

Группы агентов J_k, $k=0,...,n$ образуют разбиение всего множества агентов: $\bigcup\limits_{k=0}^{n} J_k = A$. В силу соотношений (4.6)-(4.8) балансы (4.3) приобретают вид:

$$X_i^A=V_i^{J_k}+\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_kJ_m}-X_i^{J_mJ_k}\right),\qquad i\in I_k\,,\qquad k=1,...,n\,, \tag{4.9}$$

$$0=V_i^{J_k}+\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_kJ_m}-X_i^{J_mJ_k}\right),\qquad i\notin I_k\,,\qquad k=1,...,n\,. \tag{4.10}$$

$$0=C_i^A+J_i^A+\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_0J_m}-X_i^{J_mJ_0}\right),\qquad i\in\mathcal{P}\,. \tag{4.11}$$

Сложив просуммированный по i баланс (4.10) с балансом (4.11) и выразив потоки обменов продуктами, для $i\in I_k$ получим:

$$C_i^A+J_i^A+\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n}V_i^{J_j}=-\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_0J_m}-X_i^{J_mJ_0}\right)-\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_jJ_m}-X_i^{J_mJ_j}\right)=$$

$$-\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_0J_m}-X_i^{J_mJ_0}\right)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_jJ_m}-X_i^{J_mJ_j}\right)+\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_kJ_m}-X_i^{J_mJ_k}\right)=$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_jJ_m}-X_i^{J_mJ_j}\right)+\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_kJ_m}-X_i^{J_mJ_k}\right)=\sum_{m=0}^{n}\left(X_i^{J_kJ_m}-X_i^{J_mJ_k}\right).$$

С учетом (4.9) получаем баланс

$$X_i^A=C_i^A+J_i^A+\sum_{j=1}^{n}V_i^{J_j}\,,\qquad i\in I_k\,,\qquad k=1,...,n\,, \tag{4.12}$$

который выражает тот факт, что в замкнутой экономике при неизменных запасах весь продукт расходуется на промежуточные затраты, капитальные затраты и конечное потребление. Если теперь сложить балансы (4.12), умноженные на цены продуктов p_i и разделить на дефлятор $\tilde{p}_k$, построенный по ценам группы продуктов I_k, то получится межотраслевой баланс в стоимостном выражении:

$$X_k = Z_k + \sum_{m=1}^{n} X_k^m .$$

Здесь X_k – валовой выпуск продукта отрасли k, Z_k – конечное потребление, включающее капитальные затраты, продукта отрасли k, X_k^m – межотраслевые поставки продукта k отрасли m.

Коэффициенты прямых затрат определяются отношением $a_k^m = \dfrac{X_k^m}{X_m}$, с учетом которых окончательно получаем равенство

$$X_k - \sum_{m=1}^{n} a_k^m X_m = Z_k, \; k = 1,...,n .$$

Оно является записанной построчно моделью Леонтьева (1.25), рассмотренной в п. 1.2.3.1.

4.3 Финансовые балансы

Кредитно-финансовая система обеспечивает контроль и согласование деятельности экономических агентов, оперируя стоимостными эквивалентами результатов настоящей и будущей их деятельности. Поэтому для каждого экономического агента необходимо составить также финансовые балансы.

Как мы видели, основные экономические показатели формируются с помощью денежных оценок материальных активов. Таким образом, деньги являются главным средством передачи информации в экономике. С другой стороны, при описании, например, деятельности коммерческого банка денежные показатели вообще являются основными, поэтому нужно понять, как их следует описывать. Естественно, что деньги являются аддитивной величиной, поэтому мы можем говорить о том, что каждый агент $a \in A$ в момент времени t имеет запас денег $N^a(t)$. Изменение этого запаса обусловлено несколькими группами денежных потоков:

- запас денег меняют платежи за продукты $\sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{b\in A}(\Phi_i^{ab}-\Phi_i^{ba})$ и ресурсы $\sum_{i\in\mathcal{R}}\sum_{b\in A}(\Phi_i^{ab}-\Phi_i^{ba})$;
- запас денег меняется вследствие других платежей, не связанных со встречной передачей материальных благ или заимствованием (пенсии, налоги, взятки). Такие платежи будем называть ***трансфертами***, и обозначать через T^{ab} всю сумму трансфертов, выплаченных агентом a агенту b. В модели к трансфертам следует относить платежи за все блага и активы, продажи которых явно не рассматриваются (для которых не выписываются соответствующие материальные балансы);
- запас денег изменяют отношения заимствования. Обозначим через L^{ba} сумму денег, которую агент a должен агенту b в момент времени t. С точки зрения агента b величина L^{ba} есть ссуда агенту a. Эта величина растет при получении новых кредитов и уменьшается при возврате долгов. В результате операций с долгами запас денег меняется со скоростью $\sum_{b\in A}(\frac{dL_i^{ba}}{dt}-\frac{dL_i^{ab}}{dt})$;
- заимствования L^{ba} сопровождаются встречными потоками процентных платежей R^{ab}. Хотя процентные платежи являются платой за определенную услугу, тем не менее оказывается проще отделить платежи за материальные блага и услуги от чисто финансовых операций.

Перечисленные операции с деньгами объединяются в виде финансового баланса агента a в потоках (деньги в единицу времени):

$$\frac{dN^a}{dt}=\sum_{b\in A}\sum_{i\in P}(\Phi_i^{ba}-\Phi_i^{ab})+\sum_{b\in A}\sum_{i\in R}(\Phi_i^{ba}-\Phi_i^{ab})+\sum_{b\in A}(T^{ba}-T^{ab})+$$
$$+\sum_{b\in A}(\frac{dL^{ba}}{dt}-\frac{dL^{ab}}{dt})+\sum_{b\in A}(R^{ba}-R^{ab}). \tag{4.13}$$

Если сложить все такие балансы по агентам $a \in A$, то все платежи взаимно уничтожатся, и получится равенство $\frac{d}{dt}\sum_{a \in A} N^a = 0$. Поскольку запасы денег у агентов в реальных экономических системах в целом растут со временем, из этого равенства следует, что должны существовать такие агенты, у которых запас денег отрицательный. Таких агентов называют ***эмитентами***, их множество обозначим через $E \subseteq A$, а для описания их деятельности введем показатель суммы денег, выпущенных в обращение, $W^a = -N^a \geq 0$, $a \in E$. Тогда финансовый баланс эмитента имеет вид:

$$0 = \sum_{b \in A}\sum_{i \in P}(\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A}\sum_{i \in R}(\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A}(T^{ba} - T^{ab}) + \sum_{b \in A}(\frac{dL^{ba}}{dt} - \frac{dL^{ab}}{dt}) + \sum_{b \in A}(R^{ba} - R^{ab}) + \frac{dW^a}{dt}. \quad (4.14)$$

Поток $\frac{dW^a}{dt}$ называется ***эмиссией*** денег. Для всех агентов, кроме эмитентов, $N^a \geq 0$, $a \notin E$.

Соотношение (4.14) показывает, что величину эмиссии можно рассматривать как обязательства эмитента, наравне с кредитами. Разница лишь в том, что по таким обязательствам эмитент не платит проценты и ему не известно, кому он должен. Ясно, что все агенты не могут быть эмитентами. Есть и еще одно отличие от кредита. Как правило, займы осуществляются на какой-либо оговоренный срок, ранее которого не осуществляется возврат средств. Возврат обязательств W^a (изъятие денег из обращения) происходит, если какой-либо агент платит за что-либо эмитенту. Но деньги как платежное средство должны давать возможность их владельцу оплатить ими что угодно и когда угодно. Это свойство денег называется ***ликвидностью***. Поэтому никакого срока возврата обязательств не может существовать.

Итак, в экономике деньгами служат бессрочные и беспроцентные обязательства выделенных агентов-эмитентов.

Однако может возникнуть вопрос о том, почему не может быть платежей обязательствами с процентами. Предположим, что все расчеты производятся в кредит, т.е. $N^a = 0 \ \ \forall a \in A$. Тогда

$$\sum_{b\in A}\frac{dL^{ba}}{dt}=\sum_{b\in A}\sum_{i\in\mathcal{P}}(\Phi_i^{ba}-\Phi_i^{ab})-\sum_{b\in A}\sum_{i\in\mathcal{R}}(\Phi_i^{ba}-\Phi_i^{ab})-$$
$$-\sum_{b\in A}(T^{ba}-T^{ab})+\sum_{b\in A}\frac{dL^{ab}}{dt}-\sum_{b\in A}(R^{ba}-R^{ab}).$$

Такая форма расчетов существует и называется ***кредитной линией*** для юридических лиц и ***кредитной карточкой*** для физических лиц (разрешение расходовать средства в счет будущих доходов). В обоих случаях кредитор оплачивает счета должника (клиента), записывая платежи в сумму долга и добавляя к ней процент. Погашения клиент может делать, когда ему удобно, лишь бы сумма долга не превысила оговоренного (обычно довольно большого) лимита.

Однако полностью перевести расчеты на такую систему нельзя. Можно показать [8], что использование в качестве денег только обязательств эмитента с положительной номинальной доходностью автоматически увеличивает темп инфляции на величину этой доходности. Это утверждение можно трактовать и как то, что обычные деньги имеют отрицательную доходность, равную величине инфляции, взятой с обратным знаком.

В принципе эмиссия может быть доверена разным агентам:

- чаще всего эмитентом является государство в лице национального банка (Центрального банка в РФ);
- в прошлом эмитентами выступали частные банки. В то время в обращении находились банкноты – беспроцентные бессрочные обязательства различных банков. Эта система превратилась в Федеральную резервную систему (ФРС) США, объединяющую группу специализированных банков. После образования ФРС, начали выпускаться единые денежные знаки;
- в средние века в качестве средства платежа использовалась золото и переводные векселя, выданные торговцами. Большая часть таких векселей никогда не оплачивалась золотом, а взаимно погашалась;
- производители товаров обычно не бывали эмитентами, однако в СССР существовали расчетные счета производителей, которые они могли перерасходовать, в результате чего образовывались взаимные недоплаты производителей и поставщиков комплектующих и ресурсов. Затем они превратились в так называе-

мые неплатежи, представляющие денежные суррогаты, которые в течение некоторого времени использовались в качестве платежных средств с ограниченным кругом обращения;

- в некоторых ситуациях можно считать эмитентами и домашние хозяйства, которые эмитируют деньги посредством кредитных пластиковых карточек с низким процентом.

Заметим, что этот перечень возможных эмитентов практически исчерпывает все множество экономических агентов, которые можно выделить в рыночной экономике.

4.3.1 Финансовые балансы в остатках

Финансовый баланс (4.13) отражает изменение финансовых активов и обязательств агента в каждый момент времени. Наличие огромного количества потоков платежей в реальных экономических системах не позволяет использовать для оценки возможностей агента балансы в потоках. Кроме того, финансовая отчетность, которая отражает состояние экономического субъекта, составляется исходя из количеств (запасов) финансовых активов и обязательств, или, как говорят, в ***остатках***. Финансовый баланс в остатках можно получить интегрированием по времени баланса в потоках от момента образования агента до интересующего момента времени.

Рассмотрим какое-нибудь юридическое лицо (фирму) $a \in A$, не обладающее правом эмиссии, $a \notin E$, образовавшееся в момент времени t^a. Предположим, что акционерами и учредителями этого юридического лица могут быть только физические лица, относящиеся к множеству агентов-домашних хозяйств H. Причем $a \notin H$, и государство представлено единственным агентом $g \neq a$. Проинтегрировав баланс (4.13) агента a в потоках от t^a до t, получим

$$N^a(t) + \sum_{b \in A} L^{ab}(t) = \sum_{b \in A} L^{ba}(t) + U^a + \int_{t^a}^{t} \sum_{b \in A} \sum_{i \in \mathcal{P}} (\Phi_i^{ba}(\tau) - \Phi_i^{ba}(\tau)) d\tau +$$

$$+ \int_{t^a}^{t} \sum_{b \in A} \sum_{i \in \mathcal{R}} (\Phi_i^{ba}(\tau) - \Phi_i^{ab}) + \int_{t^a}^{t} \sum_{b \in A} T^{ba}(\tau) d\tau -$$

$$-\int_{t^a}^{t}\sum_{b\in A}T^{ab}(\tau)d\tau-\int_{t^a}^{t}\sum_{b\in A}(R^{ba}(\tau)-R^{ab}(\tau))d\tau,$$

где $U^a = N^a(t^a)+\sum_{b\in A}L^{ab}(t^a)-\sum_{b\in A}L^{ba}(t^a)$.

Теперь учтем, что

- в момент образования, как правило, фирма не имеет долгов и не кредитов: $L^{ba}(t^a)=L^{ab}(t^a)=0$, а начальный запас денег образуется за счет взносов учредителей, поэтому $U^a = N^a(t^a)$ – ***уставной фонд***;
- как правило, производственная фирма приобретает ресурсы в виде труда или выплачивает ренту за пользование какими-либо другими ресурсами (будем считать, что они также принадлежат населению), $\sum_{b\in A}\sum_{i\in\mathcal{R}}(\Phi_i^{ba}(\tau)-\Phi_i^{ab}(\tau))=-\Phi^{aH}(\tau)$ – сумма ренты и заработной платы со знаком минус; здесь и далее верхний индекс вида $a\Gamma$ обозначает сумму платежей от агента a группе агентов Γ;
- из (4.4) выразим величину платы за продукты и учтем, что фирма не является конечным потребителем ($\tilde{C}_{\mathcal{P}}^a=0$): $\sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{b\in A}\Phi_i^{ba}=\tilde{J}_{\mathcal{P}}^a-\tilde{Y}_{\mathcal{P}}^a$;
- типичными трансфертами, полученными фирмой, является выручка от продажи вновь выпущенных акций. Эти доходы образуют ***акционерный капитал*** $A^a(t)=\int_{t^a}^{t}\sum_{b\in A}T^{ba}(\tau)d\tau$;
- типичными трансфертами, выплаченными фирмой, являются налоги государству $T^{ag}(\tau)$ и дивиденды акционерам $T^{aH}(\tau)$, поэтому $\sum_{b\in A}T^{ab}(\tau)=T^{ag}(\tau)+T^{aH}(\tau)$.

С учетом сказанного, получим баланс агента $a\in A$ в остатках:

$$N^a(t)+\sum_{b\in A}L^{ab}(t)+\int_{t^a}^{t}\tilde{J}_P^a(\tau)d\tau=\sum_{b\in A}L^{ba}(t)+U^a+A^a(t)+$$
$$+\int_{t^a}^{t}\sum_{b\in A}(\Pi^a(\tau)-T^{ag}(\tau)-T^{aH}(\tau))d\tau, \qquad (4.15)$$

где $\Pi^a=\tilde{Y}_P^a-\Phi^{aH}+\sum_{b\in A}(R^{ba}(\tau)-R^{ab}(\tau))$ – ***валовая прибыль***.

Мы записали баланс таким образом, чтобы в левой части оказались активы – то, чем фирма располагает (деньги, требования к другим агентам, основные фонды), а в правой – пассивы (то, что фирма должна другим агентам): кредиторам, учредителям и акционерам. Валовая прибыль показывает чистый итог работы фирмы. Если это слагаемое будет отрицательным, оно окажется в левой части, и это будет означать, что часть занятых денег фирма вложила не в активы, а отдала своим хозяевам.

В балансе (4.15) есть одна сложность, которая не позволяет в полной мере правильно оценивать будущие возможности агента. Накопленная стоимость капитальных вложений $\int_{t^a}^{t}\tilde{J}_P^a(\tau)d\tau$ отражается в наличии основных фондов. Однако, используясь в производстве, основные фонды изнашиваются и морально устаревают. Для учета этого обстоятельства в балансе основные фонды оцениваются суммой сделанных капитальных затрат (ср. с (3.14)), в которой более старые затраты входят с меньшим весом:

$$K^a(t)=\int_{t^a}^{t}e^{-\beta(\tau-t)}\tilde{J}_P^a(\tau)d\tau, \qquad (4.16)$$

где β – ***норма амортизации***, показывающая степень уменьшения стоимости основных фондов (она не совпадает с темпом физического износа оборудования и является показателем изменения балансовой стоимости основных фондов, т.е. чисто учетной величиной).

Из (4.16) $\dfrac{dK^a}{dt}=\tilde{J}^a-\beta K^a$, $K^a(t_a)=0$, откуда

$$\int_{t^a}^{t}\tilde{J}^a(\tau)d\tau=K^a(t)+\int_{t^a}^{t}\beta K^a(\tau)d\tau$$

и из (4.15) окончательно получаем:

$$N^a(t)+\sum_{b\in A}L^{ab}(t)+K^a(t)=\sum_{b\in A}L^{ba}(t)+U^a+A^a(t)+O^a(t)\,.$$

Стоящие слева активы включают

- кассовые остатки $N^a(t)$, образующие вместе с вложениями из $\sum_{b\in A}L^{ab}(t)$ ***ликвидные активы***,
- основные фонды $K^a(t)$,
- отвлеченные фонды (срочные вложения, кредиты) $\sum_{b\in A}L^{ab}(t)$.

Стоящие в правой части пассивы включают

- привлеченные средства $\sum_{b\in A}L^{ba}(t)$,
- собственные средства, состоящие из
  - уставного фонда U^a,
  - акционерного капитала $A^a(t)$,
  - нераспределенной прибыли $O^a(t)=\int\limits_{t^a}^{t}\sum_{b\in A}(B^a(\tau)-T^{ag}(\tau)-T^{aH}(\tau))d\tau$, в которую входит не валовая, а ***балансовая прибыль*** $B^a(t)=\Pi^a-\beta K^a=\tilde{Y}^a-\Phi^{aH}+\sum_{b\in A}(R^{ba}-R^{ab})-\beta K^a$. Она отличается от валовой прибыли тем, что кроме фактических платежей, включает величину амортизационных отчислений (стоимость потребленных в процессе производства основных фондов).

4.3.2 Системы платежей с несколькими видами платежных средств

Мы выяснили, как получается финансовый баланс агента, описывающий изменение остатков его денежных средств. Однако в современной экономике часто одновременно обращается несколько разных платежных средств – национальная и иностранная валюта, наличные и безналичные деньги. Для формального описания такой ситуации предположим, что существует несколько каналов обращения, в каждом из них осуществляются платежи и заимствования, причем в некоторых каналах нельзя использовать средства платежа, обращающиеся в других. Такие ограничения могут возникать либо как формальные, законодательные (например, нельзя платить иностранной валютой в магазине), либо как неформальные устойчивые самоограничения (например, население предпочитает платить наличными, а не безналичными, а производители – наоборот).

Пусть в экономике обращается M платежных средств, каждое по своему каналу обращения. Канал обращения $m \in M$ описывается потоками товаров h_{im}^{ab}, $a,b \in A$, $i \in P \cup R$, которые по нему обращаются, и ценами на эти товары p_{im}. Как правило, каналы обращения не изолированы друг от друга, поэтому некоторые экономические агенты могут использовать одновременно несколько каналов. Потоку товаров h_{im}^{ab} соответствует встречный поток платежей $\Phi_{im}^{ba} = p_{im} h_{im}^{ab}$.

При описании обращения нескольких платежных средств (видов денег) нужно учесть, что и задолженности, и трансферты, и процентные платежи могут производиться разными платежными средствами. Кроме того, нужно учесть, что агенты могут обмениваться самими платежными средствами. Будем считать, что в экономике существует единый обменный курс w_m каждого вида денег $m \in M$ по отношению к некоторым базовым деньгам $m_0 \in M$, $w_{m_0} = 1$. Тогда обмен агентом a платежного средства m на платежное средство n у агента b можно описать, введя эквивалентные потоки платежей базовыми деньгами F_{nm}^{ab}. Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной: агент a при обмене получает количество F_{nm}^{ab} / w_n денег n и количество $-F_{nm}^{ab} / w_m$ денег m. При этом необходимо учесть эквивалентность обмена и то, что передачи денег осуществляются без потерь:

$$F_{nm}^{ab} = -F_{nm}^{ba}, \qquad F_{nm}^{ab} = -F_{mn}^{ba}. \tag{4.17}$$

Предположим, что каждый агент $a \in A$ имеет запас N_m^a каждого вида денег $m \in M$. Тогда финансовый баланс в потоках, который записывается аналогично балансу (4.13) только с учетом результата операций обмена платежными средствами, имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dN_m^a}{dt} = \sum_{b\in A}\sum_{i\in P\cup R}(\Phi_{im}^{ba} - \Phi_{im}^{ab}) + \sum_{b\in A}(T_m^{ba} - T_m^{ab}) + \sum_{b\in A}(\frac{dL_m^{ba}}{dt} - \frac{dL_m^{ab}}{dt}) + \\ + \sum_{b\in A}(R_m^{ba} - R_m^{ab}) - \frac{1}{w_m}\sum_{n\in M}\sum_{b\in A}F_{nm}^{ab}.\end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь мы игнорируем возможность эмиссии. Однако из этого выражения легко можно получить баланс, который выписывался для одного платежного средства. Поэтому аналогично получится, что для каждого платежного средства должен существовать эмитент. При этом естественно считать, что каждое платежное средство эмитируется единственным эмитентом.

Умножив баланс (4.18) на w_m и выполнив интегрирование, аналогично тому, как был получен баланс (4.15), мы получим баланс в остатках. В нем на стороне активов появится слагаемое $\sum_{m\in M}\int_{t^a}^{t} w_m(\tau)\frac{dW_m^a(\tau)}{dt}d\tau$. При переходе к отчетному балансу интегрированием по частям в активах появятся оцененные по текущему курсу запасы денег, а в пассивы (в прибыль) войдет сумма переоценки (изменение суммы денег за счет изменения курса). Фактически прибыль от переоценки является фиктивной – она не является результатом каких-либо операций агента. Равно как и возможный убыток не является результатом действий держателя денежных средств.

Для определенности и с целью приблизить описание к действительности рассмотрим на примере российской экономики одновременное обращение национальной валюты – рубля и иностранной валюты – доллара. Поскольку на практике в валюте совершаются практически все виды операций, которые можно совершить в рублях, более подробное описание хождения валюты дается соотношениями (4.17), (4.18) при $M = \{руб, \$\}$. Надо только иметь ввиду, что система рублевых платежей замкнута внутри страны, и при суммировании по множеству агентов, принадлежащих одной стране $N \subseteq A$, получится соотношение $\frac{dN_{руб}^N}{dt} = 0$, которое подразумевает наличие эмитента. Система валютных платежей не замкнута внутри страны, поэтому

$$\frac{dN_{\$}^{N}}{dt}=\sum_{i\in\mathcal{P}\cup\mathcal{R}}(\Phi_{i\$}^{A\backslash N,N}-\Phi_{i\$}^{N,A\backslash N})+(T_{\$}^{A\backslash N,N}-T_{\$}^{N,A\backslash N})+$$

$$+(R_{\$}^{A\backslash N,N}-R_{\$}^{N,A\backslash N})+(\frac{dL_{\$}^{N,A\backslash N}}{dt}-\frac{dL_{\$}^{A\backslash N,N}}{dt}).$$

Слагаемые в этом выражении отвечают статьям ***платежного баланса*** – соотношению денежных платежей, поступающих в страну из-за границы, и всех ее платежей за границу в течение определенного периода времени (год, квартал, месяц). В платежном балансе находят стоимостное выражение все внешнеэкономические операции страны – торговый баланс (финансовые результаты экспортных и импортных операций, баланс оплаты труда и услуг), портфельные инвестиции, ссуды и займы, в том числе и государственные, обслуживание долгов и изменение валютных резервов.

4.4 Простейшая модель экономики

Для пояснения изложенного подхода к описанию экономической системы рассмотрим конкретный пример построения модели. Для этого необходимо:

1) определить набор материальных активов (продуктов и ресурсов), наборы финансовых инструментов, язык которых мы считаем достаточным для описания интересующих нас явлений;

2) выделить агентов, относительно независимые действия которых будут определять течение интересующих нас процессов;

3) конкретизировать общий вид балансов выделенных агентов (в балансах должны быть только те потоки, которые связаны с данным агентом). Тем самым будут определены роли агентов. Набор агентов должен быть полным в том смысле, что по материальным балансам должен прослеживаться путь любого продукта или ресурса от источника до стока, а по финансовым балансам – от эмиссии до погашения;

4) описать внутренние и внешние ограничения на действия каждого из агентов. Тем самым будут описаны возможности агентов и их информированность;

5) определить, как агенты делают выбор и как согласуются выборы разных агентов.

Далее мы выполним действия, соответствующие первым трем пунктам, поскольку они определяют общую структуру модели. Имея их, можно рассматривать разные способы взаимодействия агентов, не сильно меняя при этом общую схему модели. Примеры того, как могут быть решены задачи последних двух пунктов, мы рассмотрели ранее в главах 1 и 2.

4.4.1 Однопродуктовая модель

Однопродуктовая модель – это предельно агрегированная модель экономики. Она должна объяснять, как изменяются со временем составляющие основного макроэкономического баланса в результате взаимодействия агентов, рассматривая движение только одного обобщенного продукта – (реального) валового внутреннего продукта.

Если в рассматриваемой экономической системе существенная часть продукта продается за границу, то это означает, что часть важных агентов – покупатели экспортных и продавцы импортных продуктов – оказываются вне рассматриваемой системы. Поэтому мы будем говорить о замкнутой экономике, т.е. будем считать, что $E = I = 0$. Внутри экономики мы будем различать личное (индивидуальное) потребление и государственное (общественное). Таким образом, однопродуктовая модель будет описываться на языке потоков валового внутреннего продукта, валового накопления инвестиций, совокупного личного и государственного потребления, удовлетворяющих балансовому уравнению $Y = C + G + J$.

Будем считать, что для производства продукта необходимы затраты ресурсов, основным из которых является труд. Обозначим совокупный поток затрат труда через L.

Такая модель соответствует системе европейского капитализма XIX века. Ориентируясь на нее, мы не будет рассматривать акционерный капитал, потребительский кредит и обращение ценных бумаг. Однако при описании денежной системы мы будем ориентироваться на системы XX века, поскольку более ранние основывались на не очень подходящем нам золотом стандарте.

Экономические отношения будем описывать взаимодействием агентов разных типов, каждый из которых использует или производит свою часть продукта Y и свою часть трудовых затрат L. Все множество агентов разделим на непересекающиеся подмножества, каждое из которых объединяет агентов одного типа:

$$A = P \cup T \cup H \cup B \cup \{g\} \cup \{c\},$$

где P – множество производителей, T – множество торговцев, H – множество домашних хозяйств, B – множество банков, g – государство, c – Центральный банк.

Теперь рассмотрим отдельных агентов и их балансы.

4.4.2 Производитель

Агент-производитель $a \in P$ затрачивает часть ресурса L^a и за счет этого производит свою часть ВВП Y^a. Весь произведенный продукт производитель продает торговцам, получая чистый доход Φ_Y^{Ta}, а за использованный труд он платит домашним хозяйствам заработную плату Φ_L^{aH}. Возможности выпуска производителя зависят от технологических ограничений, описание которых мы приводить не будем. Но будем учитывать, что производитель может расширять свои производственные возможности за счет капитальных затрат. Для них он должен купить продукт J^a у торговцев, заплатив за него величину валовых инвестиций Φ_J^{aT}. Перечисленные величины связаны через индекс ставки заработной платы s и цену единственного рассматриваемого продукта $\tilde{p}$:

$$\Phi_L^{aH} = sL^a, \; \Phi_Y^{Ta} = \tilde{p}Y^a, \; \Phi_J^{aT} = \tilde{p}J^a.$$

Производителя мы считаем юридическим лицом, владельцем которого являются домашние хозяйства. Все трансферты производителя сводятся к выплате дивидендов владельцам и налогов государству. Производитель может заимствовать средства у банков. Величина $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ определяет нетто-кредиты производителю, т.е. разность потоков новых и погашаемых кредитов. За предоставленные ссуды L^{Ba} производитель платит проценты R^{aB}. Помимо займов юридические лица, как правило, держат в банках расчетные счета, представляющие беспроцентную, бессрочную ссуду производителя банкам. Получаем для производителя следующий финансовый баланс:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_Y^{Ta} - \Phi_J^{aT} - \Phi_L^{aH} - T^{aH} - T^{ag} + \frac{dL^{Ba}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} - R^{aB},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, Φ_Y^{Ta} – величина чистого дохода, Φ_J^{aT} – валовые инвестиции, Φ_L^{aH} – фонд заработной платы, T^{aH} – дивиденды, T^{ag} – налоги, $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ – прирост ссуд банков, $\frac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов, R^{aB} – процентные платежи по ссудам.

Все производители в совокупности производят весь продукт и расходуют весь ресурс:

$$Y^P = Y,\ L^P = L.$$

4.4.3 Торговец

Рассмотрим агента-торговца $a \in T$. Он покупает у производителя продукт V^a и платит за него деньги, при этом скупается весь произведенный продукт и выплачивается вся выручка производителей:

$$\Phi_Y^{aP} = \tilde{p} V^a,$$

$$V^T = \sum_{a\in T} V^a = \sum_{a\in P} Y^a = Y^P = Y,\ \sum_{a\in T} \Phi_Y^{aP} = \Phi_Y^{TP} = \sum_{a\in P} \Phi_Y^{Ta}.$$

Продукт продается домашним хозяйствам и государству для потребления, а также производителям для капитальных затрат:

$$V^T = C + G + J.$$

За проданный продукт торговец получает от домашних хозяйств, государства и производителей платежи Φ_C^{Ha}, Φ_G^{ga} и Φ_J^{Pa} соответственно.

Так как мы предположили, что вся добавленная стоимость создается производителями, то торговцы являются чистыми посредниками – цена продажи совпадает с ценой производителя. Но не создавая добавленной стоимости, посредники не платят налоги, не расходуют ресурсы, не могут брать кредиты. Они только имеют запас наличных и безналичных средств:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_J^{Pa} + \Phi_G^{ga} + \Phi_C^{Ha} - \Phi_Y^{aP} - \frac{dL^{Ba}}{dt}.$$

При сложении таких балансов для всей торговли получится равенство $\frac{dN^T}{dt} + \frac{dL^{BT}}{dt} = 0$.

Чистых посредников нет смысла рассматривать по отдельности, их поведение полностью определяется суммарным балансом. Более содержательное описание торговли получится, только если разделить производство добавленной стоимости между производителями и торговцами.

4.4.4 Домашнее хозяйство

Рассмотрим агента-домашнее хозяйство $a \in H$. Он покупает у торговцев продукт в количестве C^a, за который платит сумму, составляющую потребительские расходы:

$$\Phi_C^{aT} = \tilde{p}C^a, \; C^H = C.$$

Домашнее хозяйство продает труд производителю, получая заработную плату:

$$\Phi_L^{Pa} = sL^a, \; L^H = L^P = L.$$

Домашнее хозяйство может быть владельцем банков или предприятий и получать от них дивиденды. Домашнее хозяйство платит налоги государству и получает от него трансферты в виде заработной платы государственных служащих и пособий. Потребительский кредит мы не рассматриваем, но учитываем сбережения домашних хозяйств в банках, за которые оно получает процентные платежи.

В результате финансовый баланс домашнего хозяйства приобретает вид:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_L^{Pa} - \Phi_C^{aT} + T^{Ba} + T^{Pa} - T^{ag} + T^{ga} - \frac{dL^{aB}}{dt} + R^{Ba},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост наличных денег, Φ_L^{Pa} – зарплата на производстве, Φ_C^{aT} – потребительские расходы, T^{Ba} – дивиденды банков, T^{Pa} – дивиденды производителей, T^{ag} – налоги, T^{ga} – пособия и зарплата государственных служащих, $\dfrac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост сбережений, R^{Ba} – процентные платежи по вкладам.

4.4.5 Государство

В рамках рассматриваемой модели государство следует сопоставлять с консолидированным государственным бюджетом, включая внебюджетные фонды (поскольку за счет средств этих фондов осуществляются социальные выплаты). Государство реализует общественное потребление, для чего покупает у торговцев продукт, расходы на оплату которого составляют часть государственных расходов. Оставшаяся часть государственных расходов разделяется на оплату труда государственных служащих и пособия населению. В рамках нашей модели эта заработная плата должна рассматриваться как трансферт, поскольку в модели никак не учитывается то, за что эти деньги платятся (общественные блага, образование, медицинское облуживание).

Средства для оплаты государственных расходов государство получает за счет налогов, которые платят производители, население и банки. Кроме того, государство получает прибыль Центрального банка.

Если доходов не хватает, то государство должно прибегать к заимствованию. Будем считать, что государство может занимать деньги под процент только у Центрального банка (а не у населения и коммерческих банков). Это означает отсутствие обращения государственных облигаций.

С учетом сказанного финансовый баланс государства (фактически, министерства финансов или казначейства) имеет вид:

$$\frac{dN^a}{dt} = -\Phi_G^{gT} + T^{cg} + T^{Bg} + T^{Pg} + T^{Hg} - T^{gH} + \frac{dL^{cg}}{dt} - R^{gc},$$

где $\dfrac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, Φ_G^{gT} – оплата государственных закупок, T^{cg} – прибыль Центрального банка, T^{Bg} – налоги от банков, T^{Pg} – налоги от производителей, T^{Hg} – налоги от населения, T^{gH} – пособия и зарплата государственных служащих, $\dfrac{dL^{cg}}{dt}$ – прирост внутреннего государственного долга, R^{gc} – процентные платежи.

Разность между доходами и расходами определяет величину профицита или дефицита бюджета.

Для государства имеет смысл рассматривать только баланс в потоках, поскольку для государства может и не выполняться условие обеспеченности кредитов какими-либо активами, а это будет означать возможность наличия отрицательных собственных средств.

4.4.6 КОММЕРЧЕСКИЙ БАНК

Коммерческие банки в экономике выполняют чисто финансовые функции – выдают кредиты производителям и населению, принимают вклады населения, производят расчеты между производителями. Основным источником доходов банков являются процентные платежи. В отличие от других агентов коммерческие банки в совокупности представляют достаточно однородную структуру в смысле того, что они производят одни и те же операции с одними и теми же средствами – деньгами. Конечно, существуют и межбанковские операции, но они не имеют значительного влияния на развитие экономики и обусловлены, в основном, финансовыми потребностями самих банков. Поэтому в макроэкономической модели естественно описывать всю систему коммерческих банков одним агрегированным агентом, осуществляющим финансовые операции. Естественными ограничениями деятельности банка является соблюдение банковского баланса (сумма активов должна быть равна сумме пассивов) и соблюдение резервных требований по средствам клиентов в соответствии с установленной нормой резервирования.

Рассмотрим агента «коммерческий банк» $a \in B$. Мы считаем его юридическим лицом, находящимся в собственности агентов из множества домашних хозяйств и занимающимся исключительно финансовыми операциями. Это означает, что банк не продает и не покупает продуктов или ресурсов.

В финансовый баланс коммерческого банка входят результаты операций кредитования производителей, ведения расчетных счетов производителей и торговцев, заимствования у населения и Центрального банка:

$$\frac{dN^a}{dt} = -T^{aH} - T^{ag} - \frac{dL^{aP}}{dt} + \frac{dL^{Pa}}{dt} + \frac{dL^{Ta}}{dt} + \frac{dL^{Ha}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} + \frac{dL^{Ba}}{dt} + \frac{dL^{ca}}{dt} - \frac{dL^{ac}}{dt}$$
$$+ R^{Pa} - R^{aH} - (R^{Ba} - R^{aB}) - R^{ac},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, T^{aH} – дивиденды, T^{ag} – налоги, $\frac{dL^{aP}}{dt}$ – прирост ссуд производителям, $\frac{dL^{Pa}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов производителей, $\frac{dL^{Ta}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов торговцев, $\frac{dL^{Ha}}{dt}$ – прирост сбережений домашних хозяйств, $\frac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост ссуд другим банкам, $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ – прирост ссуд от других банков, $\frac{dL^{ca}}{dt}$ – прирост ссуд Центрального банка, $\frac{dL^{ac}}{dt}$ – прирост резервов в Центральном банке, R^{Pa} – процентные платежи от производителей, R^{aH} – процентные платежи населению, $(R^{Ba} - R^{aB})$ – сальдо процентных платежей по межбанковским операциям, R^{ac} – процентные платежи по ссудам Центрального банка.

4.4.7 Центральный банк

Баланс Центрального банка (ЦБ) в потоках получается сложением балансов остальных агентов с учетом того, что Центральный банк является эмитентом:

$$N^c = -W^c, \; W^c = N^P + N^T + N^H + N^g + N^B,$$

где W^c – сумма денег, выпущенных в обращение.

Баланс Центрального банка удобнее записывать в остатках, а не потоках. Поскольку Центральный банк в рассматриваемой модели не имеет активов, подлежащих переоценке, баланс в остатках совпадает с отчетным балансом и имеет вид:

$$L^{cB} + L^{cg} = L^{Bc} + W^c + U^c + O^c, \ \frac{dO^c}{dt} = R^{Bc} + R^{gc} - T^{cg}.$$

Так как обычно собственные средства ЦБ малы, ими можно пренебречь, поэтому

$$L^{cB} + L^{cg} = L^{Bc} + W^c, \qquad T^{cg} = R^{Bc} + R^{gc}. \tag{4.19}$$

Отсюда видно, почему во многих странах законодательно запрещены заимствования государства у ЦБ: подставляя выражение для T^{gc} в баланс государства, получаем, что процентные платежи по государственному долгу взаимно уничтожаются, и правительство получает фактически право эмиссии денег за счет роста L^{gc}.

Опишем, как происходит регулирование деятельности банковской системы Центральным банком, соотнеся его с нашим модельным описанием.

Рассмотрим баланс Центрального банка в остатках, балансы коммерческих банков в потоках и дополнительно выпишем баланс некоторого коммерческого банка $\beta \in B$ в остатках:

$$W^\beta + L^{\beta P} + L^{\beta B} + L^{\beta c} = L^{P\beta} + L^{B\beta} + L^{T\beta} + L^{H\beta} + L^{c\beta} + U^\beta + O^\beta,$$

$$\frac{dO^\beta}{dt} = R^{P\beta} - R^{\beta H} - (R^{B\beta} - R^{\beta B}) - R^{\beta c} - T^{\beta H} - T^{\beta g}.$$

Заметим, что главный доход банку приносят процентные платежи по кредитам производителю.

Изменения банковского баланса в результате кредитования и оплаты через счет клиента легко переносятся на формальный язык финансовых балансов. Когда банк β выдает кредит своему клиенту-производителю π, то расчетный счет клиента $L^{\pi\beta}$ и задолженность клиента банку $L^{\beta\pi}$ увеличиваются на одну и ту же величину, так что баланс не нарушается. Запас денег у банка при этом также не изменяется. Если клиент брал деньги для расчетов с другими клиентом этого банка, то дальнейшие операции происходят путем взаимных расчетов по расчетным счетам. Таким образом, пока расчеты не выходят за рамки клиентов одного банка, он может увеличивать средства клиентов, не меняя при этом запас денег. Эта операция называется ***кредитной экспансией*** или кредитной эмиссией.

Однако ясно, что как только появляется необходимость расчетов с клиентами других банков, возникает препятствие на пути кредитной экспансии. Если обеспечение платежей между клиентом π банка β и клиентом ρ банка γ происходят при наличии корреспондентских отношений между банками, то банк β перечисляет подлежащую переводу сумму с расчетного счета клиента $L^{\pi\beta}$ на счет $L^{\gamma\beta}$ своего долга банку γ и уведомляет об этом банк γ. Банк γ увеличивает одновременно свой актив в части долга $L^{\gamma\beta}$ банка β и пассив в части расчетного счета клиента $L^{\rho\gamma}$.

В отсутствие корреспондентских отношений расчеты проводятся через резервы, находящиеся в Центральном банке. Необходимость держать резервы накладывает определенные ограничения на величины, входящие в финансовый баланс коммерческих банков. Предположим, что норма резервирования равна $\xi < 1$. Тогда

$L^{\beta c} \geq \overline{L}^{\beta c}$, $\overline{L}^{\beta c} = \xi(L^{H\beta} + L^{P\beta} + L^{T\beta})$ –

средства банка в Центральном банке (резервы) не должны быть меньше доли $\xi < 1$ от суммы всех средств всех клиентов банка. Для простоты мы будем считать, что все межбанковские расчеты проводятся через разницу $\tilde{L}^{\beta c} = L^{\beta c} - \overline{L}^{\beta c}$, при этом $L^{\beta B} = L^{B\beta} = 0$.

Упражнение 12. Выяснить, к чему приводит отсутствие резервирования (норма резервирования равна 0) и полное резервирование (норма резервирования равна 1).

В зависимости от того, как ЦБ размещает собранные резервы, различают несколько систем обращения.

1. Денежное обращение в замкнутой экономике без натуральной эмиссии.

Баланс (4.19) предоставляет Центральному банку единственную возможность вложения резервов в активы, не созданные самой банковской системой – вложение в государственные обязательства: $\overline{L}^{Bc} = L^{cg}$. Тогда $W^c + \tilde{L}^{Bc} = L^{cB}$. Это означает, что все наличные деньги и все деньги, использующиеся для безналичных расчетов (денежная масса М2), появляются постольку, поскольку коммерческие банки занимают деньги у ЦБ под учетную ставку. Такая система действует в США.

2. Денежное обращение в открытой экономике.

Мы знаем, что Центральный банк имеет счета в иностранной валюте, однако в силу того, что изначально мы описывали замкнутую экономику, у нас не было никакого источника притока иностранной валюты. Для того чтобы получить необходимое описание, предположим, что Центральный банк имеет запас валюты (и золота) $Z^c(t)$ и может изменять его за счет покупок и продаж на бирже по текущему курсу $w(t)$. Тогда баланс Центрального банка в потоках имеет вид:

$$0 = \frac{dL^{cB}}{dt} + \frac{dW^c}{dt} - \frac{dL^{Bc}}{dt} - \frac{dL^{gc}}{dt} + R^{Bc} + R^{gc} - T^{cg} - w\frac{dZ^c}{dt}.$$

Поскольку валюта продается на бирже, то отчетный баланс Центрального банка должен содержать в активе оценку валютных резервов по текущему курсу $\tilde{Z}^c(t) = w(t)Z^c(t)$. В этом случае балансовая прибыль содержит прибыль от переоценки валютных резервов $\frac{dw}{dt}Z^c$. С учетом малости собственных средств ЦБ, получаем $\tilde{Z}^c + L^{cB} + L^{cg} = \bar{L}^{Bc} + \tilde{L}^{Bc} + W^c$, $T^{cg} = R^{Bc} + R^{gc} + \frac{dw}{dt}\frac{\tilde{Z}^c}{w}$.

Отсюда видно, что эмиссия наличных денег может производиться:

- при обналичивании корреспондентских счетов банков или при получении банками кредитов ЦБ,
- при кредитовании государства,
- при покупке валюты на бирже.

Заметим, что если ЦБ не дает кредитов коммерческим банкам, $L^{cB} = 0$, и не кредитует государство сверх суммы обязательных резервов, $L^{cg} = \bar{L}^{Bc}$, то

$$\tilde{Z}^c = \tilde{L}^{Bc} + W^c = \tilde{L}^{Bc} + N^A.$$

Это означает, что все высоколиквидные активы агентов полностью обеспечены запасом иностранной валюты. Такая денежная политика носит название ***валютного управления***.

3. Система денежного обращения в России.

Российская денежная система прошла несколько этапов. В СССР Госбанк (будущий ЦБ) был единственным банком. Он регулировал систему денежного обращения, кредитовал производителей, обеспечивал расчеты, хранил сбережения населения. Валютные резервы в СССР большого значения не имели в силу отсутствия обменов рубля на валюту. Для получения баланса Госбанка необходимо сложить балансы всех коммерческих банков с балансом ЦБ, отбросить собственные средства и государственный долг: $N^c + L^{Pc} = L^{cP} + L^{cT} + L^{cH} + W^c$.

Денежная система периода высокой инфляции 1992-1994 годов сформировалась также в отсутствие частных коммерческих банков, в условиях неопределенных отношений к собственности. ЦБ России осуществлял кредитование предприятий (льготные кредиты), вел расчеты и дополнительно кредитовал государственный бюджет. Золотовалютные резервы стали играть существенную роль, а сбережения населения обесценились. Баланс ЦБ в таких условиях: $N^c + L^{Pc} + L^{cg} + \tilde{Z}^c = L^{cP} + L^{cT} + W^c$.

Денежная система периода финансовой стабилизации 1995-1998 годов сформировалась в условиях борьбы с инфляцией, изменились кредитные отношения, возникшая банковская система взяла на себя функции расчетов. Статистические данные показывают, что до 1997 года соблюдался принцип валютного управления. В конце 1997 года этот принцип разрушился – ЦБ выдал кредиты государству.

После кризиса 1998 года денежная политика стала более тонкой. Сначала был восстановлен баланс $\tilde{Z}^c = \tilde{L}^{Bc} + W^c = \tilde{L}^{Bc} + N^A$, затем государство получило дополнительные кредиты от ЦБ, но так, что не возникло сильной инфляции. Это позволило выполнить обязательства бюджета и пополнить оборотные фонды предприятий. Оздоровление экономики позволило сводить бюджет с профицитом. При этом часть избыточных средств была размещена в ЦБ и использована для увеличения золотовалютных резервов. Таким образом, сейчас баланс ЦБ нужно записывать в виде $N^c + L^{cB} + L^{cg} + \tilde{Z}^c = L^{Bc} + L^{Tc} + L^{gc} + W^c$.

4.4.8 Полная система уравнений модели

Уравнения балансов только связывают переменные, соответствующие действиям экономических агентов. Для получения полной системы уравнений, описывающих состояние экономики и ее эволюцию, необходимо определить выбор значений этих переменных агентами, т.е. задать стратегии поведения в зависимости от той информации, которой располагают агенты. Для этого, в свою очередь, требуется формализовать описание интересов и целей экономических агентов, их информированность о состоянии экономической системы, а также описать отношения (взаимодействия) экономических агентов. В результате такого подхода экономические отношения можно представить как результат согласованных действий и взаимодействий экономических агентов. Для каждого агента предполагается описание его действий в зависимости от значения информационных переменных, а согласование действий агентов осуществляется поиском таких информационных переменных, при которых выполняются все уравнения материальных и финансовых балансов.

Для окончательного формирования модели необходимо выбрать принципы оптимальности, которыми руководствуются выделенные агенты, и указать технологические ограничения. Для этого надо описать интересы экономических агентов, их информированность о состоянии системы, отношения экономических агентов. Короче говоря, необходимо описать экономические механизмы регулирования производства и обращения. Они зависят от особенностей описываемой экономический системы, и будут разными в зависимости от того, какую экономику пытаются моделировать.

На практике, как правило, исходят из классических принципов, описанных в гл. 1-3. В частности, модель Эрроу-Дебре (см. п. 3.1.2) представляет основу для построения моделей, в которых каждый из агентов, действуя оптимальным образом, определяет в зависимости от значений информационных переменных, оптимальные объемы потребления и производства благ и услуг. Согласование действий агентов происходит за счет выполнения балансов продуктов и услуг, из которых определяются значения информационных переменных.

Такие модели являются достаточно сложными, поскольку требуют одновременного решения нескольких параметрических задач оптимизации или оптимального управления, а также составления большого числа балансовых уравнений с учетом возможных дополнительных ограничений на переменные и параметры. В то же время понятно, что при усложнении модели ее общая структура сохранится. Это свойство позволило создать информационную технологию поддержки математического моделирования, основы которой мы изложим далее.

Глава 5. ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ

Equation Section (Next)При создании модели экономики возникает не только содержательная проблема адекватного описания взаимодействий агентов, но и технологическая проблема работы с моделью. Полная модель получается в результате соединения описаний нескольких агентов, поведение каждого из которых описывается условиями оптимальности. Все вместе они становятся громоздкой системой разнородных нелинейных соотношений.

Соотношения модели имеют экономический смысл и образуют естественные блочные структуры. Эту информацию можно использовать для инструментального контроля правильности модели, но система математических соотношений не содержит этой информации.

Как уже было сказано, модель, построенная на основе принципов САРЭ, может быть представлена как набор описаний поведения экономических агентов и набор описаний взаимодействий этих агентов. Эти описания (блоки модели) объединяются в целое системой материальных и финансовых балансов. В результате анализа структуры моделей САРЭ была разработана особая форма записи соотношений модели – ***каноническая форма*** [13], допускающая инструментальную проверку корректности модели.

Здесь мы опишем каноническую форму как набор словесных правил и рекомендаций, но на самом деле каноническая форма – строго определенный объект. Каноническая форма модели представляет собой систему дифференциальных и конечных уравнений и конечных[11] неравенств, содержащих определенный набор переменных величин и постоянных параметров, в которой как соотношения, так и переменные имеют ***классифицирующие признаки***. Эти признаки фиксируются по ходу записи модели и хранятся в специальной базе данных. Признаки несут информацию, необходимую для проверки корректности модели.

Допустимый синтаксис соотношений, их групп и блоков описан в нотации Бэкуса-Наура, а возможные способы размеще-

[11] За единственным исключением условия неубывания запасов.

ния групп соотношений и наименования переменных задаются системой аксиом. Доказана в некотором смысле единственность представления модели в канонической форме.

5.1 Каноническая форма моделей системного анализа развивающейся экономики

Содержательно модель в канонической форме описывает движение экономики как результат взаимодействия экономических макроагентов. Каждый макроагент представляется лицом, принимающим решение. Поведение агента описывается как выбор значений переменных модели, которые можно интерпретировать как управления агента. Такие переменные мы называем ***планируемыми переменными*** агента. Например, это – материальные и финансовые потоки, отражающие обмены между макроструктурами сферы производства и сферы потребления. Выбор агента зависит от внешних условий, которые описываются информационными переменными такими, как цены, курсы, ставки налогов и т. д. Описание поведения каждого агента в канонической форме модели образует особый блок соотношений – блок ЭА.

Выбор агента, описанный в блоке ЭА, рассматривается не как его окончательное решение, а как некоторый условный план – функция предложения или спроса (см., например, (1.4)).

Процедуры согласования условных планов разных агентов относительно выбора одной и той же величины также описываются в особых блоках модели – блоках взаимодействия ВД. В этих же блоках из условий согласования планов определяются значения информационных переменных.

Нечеткое определение «процедуры согласования планов» оставляет достаточно свободы, чтобы включить в каноническую форму все известные в математической экономике способы описания функционирования рынков. Заметим, что модель в канонической форме не относится к классу моделей конфликта и компромисса, рассматриваемых в теории игр, потому что в ней значения информационных переменных не определяются ни одним из лиц, принимающих решение.

Блокам ЭА и блокам ВД присваиваются краткие условные имена. Блочная структура канонической формы позволяет разделить «сферы компетенции» агентов по простому правилу: в соотношения блока ЭА могут входить только планируемые переменные этого агента и информационные переменные, следовательно, не могут входить планируемые переменные других агентов. Блоки ВД могут содержать планируемые переменные разных агентов и информационные переменные, связанные только с этим блоком.

Описания согласования условных планов агентов посредством информационных переменных отражают, в основном, характер отношений обменов в конкурентной среде. В экономике не менее важны отношения собственности, власти, социальной солидарности. В этих отношениях характерно то, что один из взаимодействующих агентов передает другим информацию о своем внутреннем состоянии. Например, управляющий фирмой отчитывается перед акционерами о состоянии фирмы, налогоплательщик информирует налоговый орган о своей налоговой базе, получатель пособия, как правило, заранее знает величину пособия и условия его получения. В канонической форме модели требуется явно описать правила обменов информацией между агентами. Для этого индексированием информационной переменной именем соответствующего блока ВД список информационных переменных модели разбивается на классы, ассоциированные с блоками ВД, а в блоках ЭА указывается, в каких взаимодействиях участвует агент. В блоках ЭА можно использовать информационные переменные только тех блоков ВД, в которых данный агент участвует, а в блоках ВД можно использовать только информационные переменные данного блока ВД и планируемые переменные участников этого ВД.

Совокупность соотношений каждого блока разбивается на группы следующих типов: **Role**, **Tech**, **Other**, **Choice (**только в блоках ЭА), **Balance, Con** (в любых блоках), **Ia** (только в блоках ВД). Группа каждого типа характеризуется значениями специфических для этого типа признаков:

- **Role –** определяет внешние (институциональные) ограничения на действия агента в блоке ЭА, т.е. задает роли агентов,
- **Tech –** отражает технологические ограничения на преобразование одних благ в другие и получение благ извне,
- **Choice** – характеризует явно указанный выбор агента,
- **Balance -** содержит материальные и финансовые балансы,

- **Con** – содержит ограничения на параметры,
- **Ia** – классифицирует все взаимодействия, не входящие в балансовую группу,
- **Other** – содержит ограничения, не входящие ни в одну группу.

5.2 Система балансов

Как мы знаем, модели САРЭ основаны на полной системе материальных и финансовых балансов всех агентов. В канонической форме модели балансы выделены в отдельный класс соотношений модели. Уравнения балансов содержатся как в блоках ЭА, так и в блоках ВД и всегда имеют вид, который можно получит, обобщив уравнения (4.1) и (4.13):

$$\frac{\textit{Скорость изменения}}{\textit{запаса}} = \frac{\textit{алгебраическая сумма}}{\textit{потоков}} \tag{5.1}$$

Если изменением запаса блага пренебрегают, то алгебраическую сумму потоков считают равной нулю. Такая запись баланса тоже допускается канонической формой.

Аддитивность запасов выражается требованием: каждая переменная, описывающая поток, содержится либо только в одном уравнении, либо в двух уравнениях баланса, в которые эта переменная входит с противоположными знаками. Это есть формальное выражение интуитивного представления о том, что поток можно направить «только по одному адресу». Чаще всего балансы, содержащие один и тот же поток, располагаются в разных блоках модели.

Уравнение материального баланса блага g агента a, которое содержится в блоке ЭА, в непрерывном времени имеет общий вид:

$$\frac{d}{dt}q_g^a = \sum_{\alpha\in\text{источники}} x_g^{\alpha,a} - \sum_{\omega\in\text{стоки}} c_g^{a,\omega} + \sum_{\gamma\in\{\text{ВД}\}} \left(h_g^{\gamma,a} - h_g^{a,\gamma}\right). \tag{5.2}$$

В левой части (5.2) стоит скорость изменения запаса q_g^a блага g у агента a. В правой части стоит (5.2) алгебраическая сумма потоков:

- поступления $x_g^{\alpha,a}$ блага g от источников – производства или из окружающей среды;
- расходования $c_g^{a,\omega}$ блага g в результате его конечного или промежуточного (производственного) потребления, включая капитальные затраты, т.е. передача блага «стокам»;
- передач $h_g^{a,\gamma}$ блага g другим агентам и получения $h_g^{\gamma,a}$ блага g от других агентов в результате взаимодействия γ.

Никаких априорных ограничений на знаки потоков каноническая форма не накладывает. Вообще говоря, можно было бы обойтись величинами чистых продаж $y_g^{a,\gamma} = h_g^{a,\gamma} - h_g^{\gamma,a}$, но при создании модели удобнее оперировать направленными потоками.

В канонической форме модели переменные, описывающие поступление и расходование материального блага, связываются с одной из групп соотношений типа **Tech.** Эта группа может содержать технологические ограничения на преобразования одних благ в другие и получения благ извне, а может быть пустой. Пустые группы соотношений просто отмечают тот факт, что соответствующий поток является началом или концом цепочки материальных балансов блага.

Передача блага $h_g^{a,\gamma}$ является планируемой переменной агента a, поэтому она адресуется не другому агенту, а блоку γ типа ВД, из которого истинный адресат – агент b – и получит поток $h_g^{\gamma,b}$. Таким образом, в блоках ВД появляются буферные уравнения балансов, связывающие балансы благ у разных агентов. Как правило, обмены разными благами между агентами описываются в разных блоках ВД, представляющих в модели рынки каждого из благ, хотя каноническая форма модели этого и не требует. Кроме того, обычно можно считать, что при обменах блага не накапливаются, и записывать материальные балансы в ВД γ в виде

$$0 = \sum_{a \in \{\text{ЭА}\}} \left(h_g^{a,\gamma} - h_g^{\gamma,a} \right). \qquad (5.3)$$

Каноническая форма модели допускает и в блоках ЭА уравнения баланса с нулем в левой части. Но в таких балансах нельзя менять знаки у всех слагаемых на противоположные, поскольку в уравнении баланса левая часть всегда имеет смысл скорости изменения запаса. На этом примере хорошо видно, чем соотношения канонической формы модели отличаются от формальных уравнений модели.

С другой стороны, каноническая форма допускает наличие неких «буферных» запасов q_g^γ материальных благ, ассоциированных с блоками ВД и не принадлежащих ни одному из агентов. В этом случае баланс (5.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt} q_g^\gamma = \sum_{a \in \{\text{ЭА}\}} \left(h_g^{a,\gamma} - h_g^{\gamma,a} \right). \tag{5.4}$$

Если дополнить этот баланс в блоке ВД неравенством $\frac{d}{dt} q_g^\gamma \geq 0$, т.е. допустить возможность потери благ при передаче, то получится непрерывный аналог условия равновесия (см. 3.1.1).

Каноническая форма допускает возможность использовать для платежей различные финансовые инструменты и обменивать эти инструменты друг на друга. Поэтому уравнения баланса финансовых инструментов, которые содержатся в блоках ЭА, имеют общий вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_i^a = &\sum_g \sum_{\gamma \in \{\text{ВД}\}} \left(H_{i,g}^{\gamma,a} - H_{i,g}^{a,\gamma} \right) + \sum_\tau \sum_{\gamma \in \{\text{ВД}\}} \left(T_{i,\tau}^{\gamma} - T_{i,\tau}^{a,\gamma} \right) + \\ &+ \sum_\kappa \sum_{\gamma \in \{\text{ВД}\}} \left(K_{i,\kappa}^{\gamma,a} - K_{i,\kappa}^{a,\gamma} \right) + \sum_\kappa \sum_{\gamma \in \{\text{ВД}\}} \left(R_{i,\kappa}^{\gamma,a} - R_{i,\kappa}^{a,\gamma} \right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

В левой части уравнения стоит скорость изменения остатка i-го финансового инструмента s_i^a у агента a, а в правой части – алгебраическая сумма потоков i-го финансового инструмента. Верхние индексы обозначают, откуда и куда идут платежи и переводы инструмента i, первый нижний индекс обозначает вид инструмента, а второй нижний индекс указывает тип операции с инструментом – за что агент платит (получает) или почему переводит (получает перевод). В уравнении (5.5) учтены результаты следующих операций[12]:

- потоки платежей $H_{i,g}^{a,\gamma}$ агента a инструментом i за поставки ему $h_g^{\gamma,a}$ блага g и платежей $H_{i,g}^{\gamma,a}$ агенту a инструментом i за поставки им $h_i^{a,\gamma}$ блага g в отношениях обмена по ВД γ;
- потоки трансфертов $T_{i,\tau}^{\gamma}$, $T_{i,\tau}^{a,\gamma}$ типа τ, осуществляемых инструментом i в рамках взаимодействия γ. Объем подлежащих получению трансфертов $T_{i,\tau}^{\gamma}$ чаще всего сообщается агенту, а не планируется им, поэтому мы его здесь обозначили как информационную переменную*;*
- потоки $K_{i,\kappa}^{\gamma,a}$, $K_{i,\kappa}^{a,\gamma}$, описывающие поступления и передачи финансовых инструментов в связи с операцией κ обмена одних инструментов на другие во взаимодействии γ. К таким операциям относятся, в частности, кредитование и заимствование;
- связанные с кредитными отношениями потоки процентных платежей: полученных $R_{i,\kappa}^{\gamma,a}$, и уплаченных $R_{i,\kappa}^{a,\gamma}$.

В канонической форме требуется записывать все балансы в виде (5.5), а выражения потоков записывать явно как отдельные соотношения модели (институциональные ограничения). Иначе невозможно инструментально проверить корректность записи системы балансов.

В канонической форме модели финансовые потоки от одного экономического агента к другому описаны избыточно (как потоки через буферный запас денег в блоке ВД), точно так же, как описания потоков материальных благ. Так как согласно правилам учета все остатки финансовых инструментов кому-то принадлежат, то уравнения баланса в блоке ВД обязаны иметь вид (5.3). Например, для потоков заимствований уравнения финансовых балансов блока ВД γ будет иметь вид

---

[12] Приведенная ниже содержательная классификация финансовых потоков в канонической форме не требуется и не фиксируется.

$$0 = \sum_{a \in \{ЭА\}} \left(K_{i,к}^{a,\gamma} - K_{i,к}^{\gamma,a} \right). \tag{5.6}$$

Баланс платежей должен содержаться в том же блоке ВД, что и соответствующий ему материальный баланс.

Как мы знаем, система финансовых балансов, в отличие от системы материальных балансов, замкнута. После суммирования всех балансов (5.2), (5.3) материального актива g в правой части останется сумма источников и стоков. После суммирования всех балансов (5.5) со всеми балансами типа (5.6), записанными в блоках ВД, для инструмента i в правой части останется ноль:

$$\frac{d}{dt} \sum_{a \in \{ЭА\}} s_i^a = 0 . \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) корректно только если в перечень агентов включены эмитенты финансовых инструментов, при этом запас эмитента надо считать отрицательным. Хотя содержательно остатки финансового инструмента у всех агентов составляют их требования к эмитенту, в канонической форме не требуется представлять пассивы (обязательства) как отрицательные запасы. Просто в уравнении финансового баланса эмитента инструмента i отрицательный остаток s_i^A заменяется противоположной величиной $w_i^A = -s_i^A$ суммы финансовых инструментов, выпущенных в обращение. Об этом делается специальная пометка в записи финансового баланса.

С математической точки зрения тождественное равенство суммы обязательств, выпущенной в обращение эмитентом, сумме требований представляет собой первый интеграл системы дифференциальных уравнений финансовых балансов данного инструмента. Это свойство используется для автоматического понижения порядка системы дифференциальных уравнений модели, записанной в канонической форме.

В канонической форме модели содержание термина «финансовый инструмент» не всегда совпадает с тем содержанием, которое вкладывают в этот термин на практике. Рассмотрим каноническую форму модели открытой национальной экономики, в которой, кроме национальной, обращается и иностранная валюта. Иностранная валюта имеет источником экспортную выручку и стоком – расходы на импорт. Эмитент иностранной валюты находится вне рассматриваемой экономики, поэтому в модели не описан. Следовательно, иностранная валюта классифицируется как материальный актив. В такой формальной классификации есть содержательный смысл, потому что иностранная валюта свободно обращается, как правило, в стране со слабой валютой и выполняет функцию золотого резерва. В стране с твердой валютой иностранная валюта не имеет свободного обращения.

5.3 Описание поведения агента

Парадокс экономики в том, что рационально в ней ведут себя макроагенты. Поведение же индивидуальных агентов, таких как государство или крупные монополии, выглядит скорее иррационально. Чтобы иметь возможность описывать поведение таких индивидуальных агентов в рамках канонической формы, мы допускаем как явное описание выбора агента в блоке ЭА – выражениями планируемых переменных через информационные, так и неявное – с помощью принципа оптимальности.

Для применения принципа оптимальности в блоке ЭА следует определить:

- **набор планируемых переменных** (например, чистые выпуски, капитальные затраты и чистые продажи для агента-производителя или объемы потребления для агента-потребителя);
- **функционал**, зависящий от планируемых переменных. В общем случае функционал может зависеть от информационных переменных, как от параметров;
- **набор ограничений** на допустимые значения планируемых переменных. Ограничения также могут параметрически зависеть от информационных переменных (например, бюджетное ограничение потребителя в модели Вальраса). Содержательно ограничения описывают технологические возможности агента и сложившиеся институты, в рамках которых должен действовать агент.

Описанием поведения с помощью принципа оптимальности служит решение задачи максимизации функционала по планируемым переменным при заданных ограничениях. Это решение будет функцией информационных переменных, если ограничения и/или функционал зависят от этих переменных как от параметров.

Иногда в процессе построения модели возникает потребность сузить возможности выбора агента в рамках технологических и институциональных ограничений. Дополнительные явные связи между планируемыми и информационными переменными всегда можно ввести в блок ЭА, записав их в специальные группы **Choice**, которые могут присутствовать только в блоках ЭА. Эти же группы используются в тех случаях, когда имеет смысл описывать поведение агента явными правилами. В таком случае в группу **Choice** включаются только уравнения, которые задают зависимость планируемых переменных агента от информационных.

Вообще говоря, принципиальной разницы между явным и оптимизационным описаниями поведения нет. Чтобы провести расчеты, нужно решить задачу оптимизации и получить явные выражения планируемых переменных. Различие становится ощутимым, если, например, необходимо модифицировать модель, включив в нее дополнительные параметры. Тогда если выбор агента задан явно, то придется пересматривать все выражения для планируемых переменных. Если же применяется принцип оптимальности, то новое описание поведения агента получится автоматически как решение того же типа задачи оптимизации. Тем не менее, в список соотношений блока ЭА выражение функционала агента не включается. Общий вид системы соотношений блока ЭА можно представлять следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) \le \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{x}$ – список планируемых переменных, $\boldsymbol{p}$ – набор информационных переменных, $\boldsymbol{f}$ – список ограничений. Выражение функционала F не является отдельным соотношением этой системы.

В первую очередь, к ограничениям относятся балансы (5.2), (5.5). С уравнением баланса естественно ассоциируются простые ограничения на его переменные, например, требования неотрицательности запасов или потоков. Такие ограничения в канонической форме можно присоединять непосредственно к балансовому уравнению, образуя балансовую группу ограничений **Balance.** Дополнительные ограничения в группах **Balance** обычны в блоках агентов, но могут присутствовать и в балансах ВД. В последнем случае эти ограничения не влияют на решения агентов и служат только для контроля осмысленности получаемой траектории модели.

Другие ограничения связывают потоки и запасы из разных уравнений балансов или планируемые переменные, которые не являются ни потоками, ни запасами.

Внутренние ограничения связывают между собой только планируемые переменные агента. Часто это – технологические ограничения. Типичный частный случай технологического ограничения – ограничение выпуска x_g^a продукта g агентом a

$$x_g^a \le F(c_j^a, V^a), \tag{5.8}$$

задаваемое производственной функцией F, которая зависит от затрат c_j^a (например, труда), и производственных фондов V^a, находящихся в распоряжении агента (см., например, (2.1)). Производственные фонды растут за счет капитальных затрат c_k^a фондообразующего продукта k, имеющих эффективность $1/b$, и уменьшается вследствие выбытия с темпом μ:

$$\frac{dV^A}{dt} = \frac{c_k^A}{b} - \mu V^A. \tag{5.9}$$

В канонической форме модели соотношения (5.8), (5.9) объединяются в одну группу типа **Tech**. В признаках группы указывается, что в системе балансов эта группа «порождает» ***источник*** продукта x_i^A и «поглощает» ***стоки*** ресурса c_j^A и продукта c_k^A. Поэтому группу технологических ограничений (пустую) следует вводить, даже если в модели нет ограничений на эти потоки.

В канонической форме модели уравнения этого типа (5.9) не относятся к балансовым. Балансовое уравнение для основных фондов надо было бы выписывать, если бы мы захотели описать в модели перераспределение накопленных фондов между агентами. Известная экономическая практика включения основных фондов в балансы предприятий отражается в модели не в балансах, а в общем понятии капитала агента [33].

Среди внешних ограничений выделяются те, которые связаны с каким-то одним взаимодействием. Признаком этого служит присутствие в ограничении не только планируемых, но и информационных переменных, и только одного из ВД. Группу таких ограничений мы называем ролью агента в ВД и относим к типу **Role**. В признаках этой группы указывается, в каком ВД исполняется роль. Только наличие роли в некотором ВД устанавливает факт участия данного агента в этом ВД и, тем самым, дает разрешение на использование в блоке ЭА информационных переменных этого ВД[13].

Группа ограничений роли описывает некий институт – сложившиеся «правила игры» участника ВД.

Естественность такого разделения становится особенно наглядной, когда приходится менять исходные гипотезы. Например, каноническая форма модели не требует, чтобы агент принимал цены как данность. Можно описать агента a как продавца-монополиста. Для этого нужно считать, что для агента a цена продукта g не информационная, а планируемая переменная – p_g^a.

Описание процедуры формирования этих величин должно быть включено в блок ВД γ. Туда же следует включить соотношение, показывающие, что остальные участники рынка принимают цену, назначенную монополистом:

$$p_g^\gamma = p_g^a .$$

Этот пример показывает, что агрегированное представление множества продавцов одним экономическим агентом как лицом, принимающим решения, годится и в том случае, когда в сообществе продавцов преобладают отношения конкуренции, и в том случае, когда это сообщество ведет себя как единый монополист. Существенно не количество блоков ЭА, представляющих совокупность реальных субъектов в модели, а то, какие переменные относятся к планируемым, а какие – к информационным.

---

[13] По этой причине иногда приходится вводить пустую группу **Role** («роль наблюдателя взаимодействия»).

Агент обычно участвует (имеет роли) в нескольких ВД. Так, домашнее хозяйство выступает покупателем на рынке продуктов, продавцом на рынке труда и кредитором на рынке депозитов. Более того, агент может выступать в нескольких ролях в одном и том же ВД. Например, производитель – это продавец выпущенных продуктов и покупатель затраченных. Но когда мы строим однопродуктовую модель, эти продажи и покупки происходят на одном и том же рынке единственного в модели агрегированного продукта.

Разделение институциональных ограничений на роли – это неформальная операция содержательного структурирования модели. Необходимый набор и состав блоков ВД, по существу, определяется набором ролей агентов.

Приведенные выше соображения о соответствии состава блоков ВД набору ролей можно сделать вполне строгими. Именно, показано, что блоки ВД можно, не нарушая правил канонической формы, единственным образом разбить на неделимые далее «простейшие» блоки того же типа. Практически можно не применять алгоритм разбиения, а сразу записывать блоки ВД как можно более дробными, поскольку это повышает эффективность инструментальной проверки модели.

Еще более сложные ограничения, которые по формальным признакам не попадают ни в одну из перечисленных выше категорий в канонической форме, относят в неструктурированные группы типа **Other** блока ЭА. Аналогично в отдельные группы **Ia** блока ВД объединяются все соотношения блоков ВД, не входящие в балансовые группы.

Все, о чем говорилось выше, относилось к ***переменным*** модели, но в ее соотношения входят еще и постоянные параметры. Эти параметры считаются неотрицательными, а дополнительные условия на них можно записать в особые группы **Con**. Неравенства на параметры не используются при проверке корректности модели и различных ее автоматических преобразованиях. Но эти неравенства остаются в составе списков соотношений модели для облегчения ее аналитического исследования и корректной идентификации.

5.4 Свойства канонической формы

Целью описываемой технологии моделирования является поддержка в составлении моделей экономики и в аналитическом исследовании свойств полученных моделей. Структурная четкость модели, которую предоставляет ее запись в канонической форме, обеспечивает возможность эффективной проверки корректности модели. Но одновременно в канонической форме модели вводится много переменных и соотношений, которые оказываются совершенно лишними с точки зрения удобства аналитического исследования и решения оптимизационных задач.

Кроме того, само по себе аналитическое исследование задач оптимизации с ограничениями в общем случае очень сложно, ее аналитическое решение можно найти только в очень простых, не представляющих прикладного интереса случаях.

По этим причинам применительно к канонической форме разработаны следующие средства, позволяющие упростить процедуру анализа соотношений модели:

I. специальные алгоритмы аналитического упрощения системы ограничений блока ЭА, а также и всей системы соотношений модели. Эти алгоритмы существенно используют классификационные характеристики канонической формы. В результате автоматического преобразования выделяется ***ядро существенных соотношений***[14]***.*** «Лишние» соотношения превращаются в выражения для «лишних» переменных и отщепляются от ядра;

II. исходная оптимизационная задача, описывающая поведение агента, заменяется системой простых достаточных условий оптимальности;

III. систему достаточных условий оптимальности можно построить автоматически в аналитическом виде. В результате неявное оптимизационное описание поведения формально превращается в явное. Для упрощения этого описания достаточные условия оптимальности записываются только для ядра существенных ограничений;

---

[14] При выделении ядра потоки ликвидных активов выражаются через производные запасов, так что ядро существенных соотношений может содержать уравнения, связывающие производные нескольких переменных.

IV. запись достаточных условий оптимальности требует введения двойственных переменных. Эти переменные также вводятся автоматически и в канонической форме рассматриваются как планируемые переменные агента. Сами условия оптимальности автоматически объединяются в искусственно создаваемую группу **Choice**;

V. после такой обработки исходной записи блок ЭА включается в модель уже просто как набор соотношений на планируемые переменные.

Каноническая форма содержит не только все математические соотношения, которые образуют модель экономики, но и дополнительную информацию о разбиении соотношений модели на блоки, описывающие поведение агентов и их взаимодействия, о разделении переменных модели на планируемые и информационные, о выделении в блоках балансовых групп и групп технологических ограничений, связанных с балансами, ролей связанных с определенными взаимодействиям.

В канонической форме можно представить все детерминированные модели общего равновесия и все модели САРЭ, включая модель плановой экономики. Только в последней модели информационными переменными являются планы (а не цены) и уровни дефицитности и качества продукции.

Тем не менее, предложенная каноническая форма записи модели не универсальна. Например, в эконометрических моделях, используются эмпирические корреляции между экономическими показателями, которые невозможно интерпретировать как результат взаимодействия экономических агентов. Формально описание эконометрической модели будет состоять из одного блока ЭА. Кроме того, каноническая форма плохо подходит для записи микроэкономических моделей.

Это означает, что каноническая форма отражает некоторые содержательные свойства моделей, что и позволяет контролировать внутреннюю семантическую согласованность модели. Подчеркнем, что свойства модели, отраженные в канонической форме, являются чисто структурными. Они не связаны с интерпретацией переменных и соотношений, выраженной их названиями.

Каноническая форма помогает не только разрабатывать модель, но и структурировать исходные статистические данные о показателях развития экономики и модельные аналоги этих показателей. Потоки денег между агентами описываются финансовыми балансами в блоках ВД. По виду этих уравнений можно установить, от какого агента к какому направлены потоки платежей в данном взаимодействии и каким инструментом осуществляют платежи. После того, как с помощью модели будут вычислены значения потоков, можно получить модельные аналоги статистических данных. Для этого надо вычислить суммарные потоки на характерном промежутке времени, скажем, в квартал или год.

Эти данные можно свести в таблицу, отражающую результаты расчетов по модели в разрезе главных категорий канонической формы: «агент», «взаимодействие», «аддитивная величина». Поскольку этих категорий три, таблицу естественно строить трехмерной, т.е. составлять из отдельных листов. Листы соответствуют финансовым инструментам и описывают их оборот. Лист представляет собой таблицу, столбцы которой соответствуют агентам (блокам ЭА), а строки – взаимодействиям (блокам ВД). В клетку листа записываются потоки платежей, полученных или заплаченных данным агентом в данном взаимодействии данным финансовым инструментом.

Чтобы таблица полно отражала экономическую информацию, содержащуюся в балансовых уравнениях ВД, каждую строку следует разрезать вдоль на две части (полустроки). В верхнюю полустроку помещаются доходы агента в данном ВД, а нижнюю – его расходы. Величина доходов определяется как сумма потоков со знаком «-» в балансовых уравнениях данного ВД, относящихся к данному агенту и данному финансовому инструменту (сумма по уравнениям и индексам g, κ, τ). Расходы определяются как аналогичная сумма потоков со знаком «+».

5.5 Система поддержки математического моделирования экономики ЭКОМОД

Для работы с моделями в канонической форме была создана инструментальная система **ЭКОМОД**. Система ЭКОМОД надежно поддерживает все этапы работы с моделью: от написания соотношений до расчетов и анализа результатов. Структурно-классификационные характеристики канонической формы задаются в системе ЭКОМОД либо специальным способом обозначения переменных, либо признаками групп соотношений.

Система ЭКОМОД содержит 5 уровней контроля правильности записи модели в канонической форме. Контроль первых четырех уровней проводится строго формализовано путем проверки выполнения аксиом канонической формы.

I. **Синтаксический контроль.** Проверка выполнения обычных правил написания математических выражений: соответствия скобок, наличия операндов у бинарных операций и отношений и т. п. Проверяются также специфический синтаксис балансовых уравнений (5.1), отсутствие русских букв в именах, постоянство числа аргументов у функций и некоторые другие особенности синтаксиса соотношений канонической формы.

II. **Контроль балансов.** Проверяется, удовлетворяет ли совокупность балансовых уравнений модели условию, что один актив может входить либо только в одно уравнение баланса, либо в два, но с разными знаками.

Движение каждого актива описывается подсистемой балансовых уравнений, связанных потоками передач. Графический образ этой подсистемы уравнений образует обычную потоковую схему, которой традиционно сопровождается описание моделей экономики. Благодаря выделению балансовых уравнений система ЭКОМОД строит такие потоковые схемы автоматически.

III. **Контроль размерности.** Он основан на простом соображении, что бессмысленно складывать или сравнивать величины разных размерностей, (например, вес и стоимость), поскольку результат существенно зависит от произвольно выбранных единиц измерения (граммы или тонны, рубли или копейки). Правильная размерность системы соотношений математически означает ее инвариантность относительно некоторой группы преобразований подобия.

В канонической форме модели наиболее естественно задавать независимые размерности для активов, движение которых описывается балансовыми уравнениями. Разные запасы одного и того же актива обязаны иметь одинаковую размерность, но и разные активы (например, ссуды и наличные деньги) могут иметь одинаковую размерность. Размерность и название актива, указывается в числе признаков каждого балансового уравнения.

Потоки активов имеют размерность актива, деленную на время. Размерности активов и времени образуют базовую систему размерностей модели. Размерности остальных переменных и коэффициентов могут быть вычислены через базовые размерности по простым правилам в силу соотношений модели.

Если в процессе вычисления размерностей возникает противоречие – сложение или сравнение величин разных размерностей – система сигнализирует об ошибке. Обычно ошибка размерности означает, что в каком-то соотношении был пропущен множитель. На практике контроль размерности оказался весьма мощным и эффективным методом поиска ошибок в уравнениях модели. Контроль балансов, грубо говоря, отыскивает в соотношениях пропущенные (или лишние) слагаемые, а контроль размерности – пропущенные множители. Вместе они позволяют исключить подавляющее большинство ошибок, обычно возникающих при записи уравнений.

IV. **Контроль информационных связей.** Проверка правил использования планируемых и информационных переменных в блоках.

V. **Семантический контроль.** Проводя перечисленные выше проверки, система ЭКОМОД одновременно формирует оперативную базу данных о параметрах, переменных, функциях, балансах, активах и блоках модели. В эту базу заносятся исходные соотношения вместе с их классификаторами, а также – названия переменных, отражающие их содержательный смысл. По собранной информации система строит блок-схему модели, на которой отображаются агенты и взаимодействия, связанные ролями, а также потоковые схемы движения активов.

Семантический контроль опирается не на формальную структуру модели, а на конкретную содержательную интерпретацию ее переменных и блоков.

Как уже говорилось, соотношения модели подвергаются аналитическим преобразованиям, которые дают возможность предварительного исследования модели. Это позволяет получить качественные результаты, опираясь на которые можно точнее интерпретировать результаты численных экспериментов с моделью и целенаправленно их планировать.

Прикладные модели экономики разнообразны по виду в силу неповторимости внутренних механизмов эволюции конкретной экономики в определенный период времени и в силу разнообразия проблем, на решение которых ориентированы модели. Кроме того, модели экономики, ориентированные на получение состоятельных количественных аналитических и прогнозных оценок, представляют собой весьма сложные нелинейные системы уравнений и неравенств. Безошибочно преобразовывать и исследовать их вручную настолько трудоемко, что практически, можно считать, невозможно. Тем более что по ходу разработки первоначальная версия модели несколько раз модифицируется. Поэтому возникает соблазн менять модель по ходу исследования, а это обычно нарушает системность исходных гипотез.

Эти трудности удается преодолеть с помощью современных систем компьютерной алгебры, которые дают возможность автоматически повторить длинный цикл выкладок после модификации модели. При этом очень полезной оказывается собранная содержательная информация о соотношениях и переменных, поскольку она позволяет помнить происхождение преобразованного соотношения.

Конечно, сама компьютерная система ЭКОМОД не может построить модель. Но в ней можно хранить много «заготовок» и старых версий. С помощью системы можно проверить, подходят ли старые блоки к новой модели. В разных моделях разные блоки могут получить одно и то же название, которое до известной степени будет отражать категориальную структуру системы моделей сложной системы.

Система ЭКОМОД организована в виде набора функций и процедур, обеспечивающих запись и последующую работу с моделями в канонической форме. Последняя версия системы ЭКОМОД реализована в среде компьютерной алгебры Maple. Функции и процедуры ЭКОМОД определяются в двух библиотечных файлах, содержащих функции сбора информации о модели и контроля корректности модели и функции общего назначения, которые упрощают процесс анализа модели. Кроме библиотек, в состав системы ЭКОМОД входят макросы.

Проект в системе ЭКОМОД состоит из последовательности рабочих **mws**-файлов.

Блоки ЭА канонической формы записываются в отдельных файлах – рабочих файлах агентов. Создание этих файлов – первый этап разработки модели. Соотношения модели вводятся в обычной математической нотации как аргументы функций, соответствующих группам соотношений канонической формы. Необходимые признаки групп (размерность, название актива, список источников и стоков и пр.) тоже вводятся как аргументы этих функций.

Функции ввода групп также собирают и сохраняют информацию об отдельных соотношениях и входящих в них переменных. В частности, сохраняется исходный вид соотношения, который можно будет увидеть после всех преобразований модели. Размерность переменных и параметров определяется и сохраняется автоматически, пользователь может дать им содержательные названия.

Порядок ввода групп ограничений произволен, а их описание может перемежаться текстовыми комментариями и вспомогательными выкладками.

Поскольку в системах компьютерной алгебры не всегда можно и всегда неудобно работать с многоиндексными обозначениями, в записи системой ЭКОМОД уравнений (5.2) из четырех индексов потока и двух индексов запаса сохраняется только один – индекс агента или взаимодействия. Часть информации, которую несут остальные три индекса, фиксируется в базе данных, которые собираются в процессе ввода групп. Для себя автор модели может отразить эту информацию в многобуквенных индивидуальных именах переменных, на которые каноническая форма модели не накладывает никаких ограничений.

При создании блока ЭА не надо приписывать индекс каждой планируемой переменной, он будет присвоен автоматически при сборке модели. В системе предусмотрена возможность контролируемого переименования величин. Старое имя остается в истории переименований. При очередном переименовании предыстория проверяется, так что контаминация имен исключается.

В рабочем файле сборки все описания агентов собираются в общую систему уравнений. В нем же вводятся все соотношения, относящиеся к блокам ВД, которые и замыкают модель. Следующие за файлом сборки рабочие файлы содержат последовательные преобразования модели, исследование ее упрощенных вариантов, а также разные варианты расчетов и представления их результатов.

Обычно в процессе преобразований модель представляется в виде двух списков соотношений. Первый содержит явные выражения исключенных переменных, а второй – ядро нетривиальных соотношений на оставшиеся переменные.

Проект в системе ЭКОМОД оформляется как отдельный каталог, число и набор файлов в нем не регламентируется. По сложившейся практике проект представляет собой версию модели, которая отличается от других версий описаниями блоков ЭА или ВД.

Преобразования модели не всегда сводятся к исключению переменных или выделению частных случаев. Это могут быть и нетривиальные модификации системы соотношений, например, переход от непрерывного времени к дискретному, или аппроксимация условий дополнительности. Однако, в отличие от модификации исходных блоков, которые отражают изменение содержательных предположений, модификации в процессе преобразований носят более формальный и унифицированный характер. Это – преобразования соотношений определенного типа, более или менее независимые от их содержательного смысла. Если не требуется изменения порядка преобразований, то преобразования модифицированной системы соотношений повторяются автоматически за несколько минут.

Выполнение файлов Maple при численных экспериментах с моделью может быть организовано под управлением Microsoft Excel. Тогда исходные данные вводятся средствами Excel, а результаты выводятся в виде таблиц и графиков Excel.

Пример построения модели экономики России, учитывающей теневой оборот, средствами системы ЭКОМОД подробно описан в [33].

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ..**3**
ВВЕДЕНИЕ...**5**
Что такое экономика? 6
Моделирование экономики 8
Субъекты экономики: роли и экономические агенты..............15
Глава 1. ОПИСАНИЕ ДЕЙСТВИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ **19**
1.1 Теория потребления 20
1.2 Статические модели производства 28
1.2.1 Производственная функция 29
1.2.2 Модель Хаутеккера-Йохансена 34
1.2.3 Линейные модели производства.................................43
1.2.3.1 Модель Леонтьева 43
1.2.3.2 Учет трудовых затрат в модели Леонтьева......47
Глава 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА. **50**
2.1 Учет научно-технического прогресса в производственной функции..51
2.2 Учет времени при распределении мощностей по технологиям 53
2.3 Динамическая модель Неймана 55
2.4 Модель динамического межотраслевого баланса 59
2.5 Элементы магистральной теории 62
Глава 3. ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ...**67**
3.1 Модели равновесия 67
3.1.1 Модель Вальраса...68
3.1.2 Модель Эрроу-Дебре 73
3.1.3 Модель динамического равновесия 77
3.2 Модели роста 81
3.2.1 Модель, учитывающая эндогенный научно-технический прогресс 82
3.2.2 Модель Рамсея 85
Глава 4. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ **96**
4.1 Материальные балансы..99

4.2 Схема межотраслевого баланса 105
4.3 Финансовые балансы 107
4.3.1 Финансовые балансы в остатках 111
4.3.2 Системы платежей с несколькими видами платежных средств...114
4.4 Простейшая модель экономики 117
4.4.1 Однопродуктовая модель...118
4.4.2 Производитель...119
4.4.3 Торговец...120
4.4.4 Домашнее хозяйство...121
4.4.5 Государство 122
4.4.6 Коммерческий банк 123
4.4.7 Центральный банк...124
4.4.8 Полная система уравнений модели.........................128
Глава 5. ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ 130
5.1 Каноническая форма моделей системного анализа развивающейся экономики..131
5.2 Система балансов 133
5.3 Описание поведения агента..138
5.4 Свойства канонической формы...................................143
5.5 Система поддержки математического моделирования экономики ЭКОМОД 145
СОДЕРЖАНИЕ...151
ГЛОССАРИЙ 153
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ...166

ГЛОССАРИЙ

Агрегирование – соединение отдельных единиц или данных в единый показатель; процедура группировки объектов в категорию высшего уровня, например индивидов в общественные группы. Агрегированные показатели представляют обобщенные, синтетические измерители, объединяющие в одном общем показателе многие частные.

Аддитивность – свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, при любом разбиении объекта на части.

Баланс коммерческого банка – бухгалтерский баланс, отражающий состояние привлеченных и собственных средств, их источники, размещение в кредитные и другие операции. Различают балансовые активные счета (они отражают использование ресурсов и включают денежные средства в кассах, краткосрочные и долгосрочные кредиты, затраты на капитальные вложения; дебиторскую задолженность, прочие отвлеченные средства) и пассивные счета (они составляют ресурсы банка и включают фонды банка, депозиты физических и юридических лиц, средства в расчетах, прибыль, кредиторскую задолженность).

Баланс – уравнение, отражающее распределение материальных или финансовых ресурсов, исходя из различных источников поступления этих ресурсов.

Банкноты – денежные знаки, выпускаемые в обращение центральными эмиссионными банками. В настоящее время являются основным видом бумажных денег.

Безналичные деньги – денежные средства, платежи которыми совершаются путем перечислений по счетам в кредитных учреждениях и зачета встречных требований.

Бинарное отношение. Пара (x, y), $x, y \in G$, где G – множество произвольной природы, находится в бинарном отношении $x\mathcal{R}y$, если $(x, y) \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R} \subseteq G \times G$.

Бюджетное ограничение – финансовое ограничение на расходование денежных средств из бюджета, выражаемое в форме предельно допустимых расходов.

Валовой внутренний продукт (ВВП) – обобщающий экономический показатель статистики; выражает совокупную стоимость, произведенную внутри страны, в рыночных ценах. Рассчитывается тремя методами: по доходам, по расходам и методам добавленной стоимости. Применяется в системе национальных счетов (СНС). ВВП рассчитывается в фактических основных и рыночных ценах (номинальный ВВП). Для изучения динамики ВВП применяются постоянные цены.

Выбытие мощности – ликвидация, реализация, передача другим предприятиям и гибель от стихийных бедствий объектов, числящихся в составе основных средств.

Выпуклая функция. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, выпуклая, если $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x,y\in X$. Если $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x,y\in X$, то функция называется вогнутой.

Выпуск – 1) объем продукции, производимой в результате функционирования организации, предприятия; 2) стоимость выпущенных рыночных и нерыночных продуктов и услуг во всех отраслях и секторах экономики.

Денежная масса (денежный агрегат М2) – совокупность наличных денег в обращении (агрегатМ0) и остатков средств в национальной валюте на счетах нефинансовых организаций и физических лиц.

Депозит – вклад в банки и сберегательные кассы.

Дефляция – 1) изъятие из обращения избыточной денежной массы, сопровождаемое общим снижением уровня цен; 2) повышение покупательной способности национальной валюты.

Домашнее хозяйство – один из трех основных субъектов экономической деятельности (государство, предприятия, домашние хозяйства). Охватывает экономические объекты и процессы, происходящие там, где постоянно проживает человек, семья.

Закон Вальраса – утверждение, согласно которому полная ценность пользующихся спросом товаров (произведение цены на объем спроса) равна общей ценности предлагаемых товаров (произведение цены на объем предложения).

Замкнутая экономика – модель «самодостаточной» экономики, с незначительным удельным весом внешней торговли.

Затраты – выраженные в денежной форме расходы предприятий, предпринимателей, частных производителей на производство, обращение, сбыт продукции. Затраты называют также издержками.

Импорт – ввоз товаров, работ, услуг, результатов интеллектуальной деятельности и т.п. на таможенную территорию страны из-за границы без обязательств обратного вывоза.

Индекс цен – показатель, выражающий относительное изменение среднего уровня цен товаров во времени.

Институциональные (внешние) ограничения – описывают сложившиеся правила взаимодействия экономических агентов.

Инфляция – обесценение бумажных денег, сопровождающееся ростом цен на товары и падением реальной заработной платы.

Каноническая форма модели экономики – формальная структура модели системного анализа развивающейся экономики, удовлетворяющая определенным требованиям.

Капитальные затраты – 1) использование инвестором своего капитала, а также этот же капитал для воспроизводства основных фондов, синоним капиталовложения; 2) составная часть капиталообразующих инвестиций. Представляют собой совокупность затрат, направляемых на создание и воспроизводство основных фондов.

Квазиметрика – используется для изменения углового расстояния между векторами: для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\rho(x, y) = \left| x/\|x\| - y/\|y\| \right|$; обладает следующими свойствами: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы x, y коллинеарны; $\rho(\alpha x, \beta x) = \rho(x, y)$ для всех $\alpha, \beta > 0$; если $\lim_{k\to\infty} x_k = x \neq 0$, $\lim_{k\to\infty} y_k = y \neq 0$, то $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k) = \rho(x, y)$.

Конечное потребление – 1) показатель межотраслевого баланса, который включает фонды потребления и накопления, а также возмещение выбытия основных фондов; 2) показатель категории системы национальных счетов, характеризующий использование валового внутреннего продукта. Представляет собой стоимость товаров и услуг, предназначенных для удовлетворения индивидуальных и коллективных потребностей.

Корзина (товарная) – набор товаров-представителей (продуктов, услуг) в заданных количествах с ценами. Используется при исчислении индексов покупательной способности валют, индексов стоимости жизни (в этих случаях чаще употребляется термин «потребительская корзина»), дефляторов, а также для международных сопоставлений социально-экономических показателей.

Коэффициент эластичности – коэффициент, характеризующий относительное изменение одного признака при единичном относительном изменении другого.

Кредитная карта – именной платежно-расчетный документ, выпущенный банковским или иным специализированным кредитным (торговым) учреждением, удостоверяющий наличие в соответствующем учреждении счета владельца кредитной карточки и дающий право на приобретение товаров и услуг без уплаты наличными деньгами.

Кредитная линия – юридически оформленное обязательство банка или другого кредитного учреждения перед заемщиком предоставлять ему в течение определенного периода кредиты в пределах согласованного лимита на оговоренные цели.

Кредит – ссуда в денежной или товарной форме на условиях возвратности и обычно с уплатой процента; выражает экономические отношения между кредитором и заемщиком.

Лексикографический порядок – отношение предпочтения, при котором элемент $x \in \mathbb{R}^n$ предпочтительнее элемента $y \in \mathbb{R}^n$, $x \succeq_{lex} y$, если существует $1 \le k < n$, что $x_i = y_i$ для $i < k$ и $x_k > y_k$.

Ликвидность – способность ценностей (активов) быть быстро проданными по цене, близкой к рыночной; ликвидный – обращаемый в деньги.

Макроэкономика – 1) метод экономического анализа, основанный на оценке агрегированных показателей; 2) экономическая наука, исследующая экономику как целое, а также важнейшие ее сектора (домохозяйства, бизнес, государственный сектор и т.д. или по другой классификации промышленность, сельское хозяйство, финансовый и страховой рынок, потребительский рынок и т.д.) и использующая для этого агрегированные макроэкономические показатели и их связи.

Математическая модель – упрощенное описание реальности с помощью математических понятий.

Математическое моделирование – процесс построения и изучения математических моделей реальных процессов и явлений. Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его моделью и затем изучают последнюю.

Математическая экономика – направление теоретической экономики, использующее математическое моделирование и методы для выявления закономерностей и эффектов в экономических системах. Занимается описанием отношений и процессов, происходящих в экономике, с помощью специальных формализованных языков и анализом этих процессов и отношений методами математики.

Матрица Гессе (гессиан) – матрица, составленная из вторых частных производных функции.

Межотраслевой баланс – экономико-математическая модель, образуемая перекрестным наложением балансов распределения продукции (строки таблицы) и затрат на их производство (столбцы); детально отражает производственные и хозяйственные связи отраслей. Составляется в денежной и натуральной формах; главные показатели – коэффициенты полных затрат и коэффициенты прямых затрат.

Микроэкономика – 1) метод экономического анализа, базирующийся на оценках и исследованиях поведения индивидуальных единиц хозяйственного процесса – предпринимателей (предприятий) и потребителей; при этом всякая индивидуальная единица считается свободной и изолированной; 2) раздел экономической науки, связанный с изучением относительно маломасштабных экономических процессов, субъектов, явлений (предприятий, фирм, предпринимателей, их хозяйственной деятельности, экономических отношений между ними).

Многозначное отображение – отображение $\varphi: X \to 2^Y$, которое ставит в соответствие каждому элементу x множества X некоторое множество $\varphi(x) \subseteq Y$.

Моделирование – исследование объектов познания на их моделях; построение и изучение моделей реально существующих предметов, процессов или явлений с целью получения объяснений этих явлений, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя.

Модель – 1) образец (эталон, стандарт) для массового изготовления какого-либо изделия или конструкции; тип, марка, наименование изделия или его номер в модельном ряду; изделие (иногда из легкообрабатываемого материала), с которого снимается форма для воспроизведения в другом материале; изделие или деталь изделия, которое воспроизводит форму и/или другие характеристики сложного изделия или детали; модель, как правило, намного дешевле и быстрее в изготовлении, чем моделируемое изделие, используется для уточнения характеристик изделия или детали; 2) устройство, воспроизводящее, имитирующее строение и действие какого-либо другого («моделируемого») устройства в научных, образовательных, производственных (при испытаниях) или спортивных целях; объект моделирования, увлечения коллекционеров авиамоделей, моделей железных дорог и т.п.; 3) любой образ, аналог (мысленный или условный: изображение, описание, схема, чертеж, график, карта и т.п.) какого-либо объекта, процесса или явления («оригинала» данной модели); модель объекта или явления в науке; модель какой-либо системы аксиом (в математике и логике) любая совокупность (абстрактных) объектов, свойства которых и отношения между которыми удовлетворяют данным аксиомам, служащим тем самым совместным (неявным) определением такой совокупности.

Научно-технический прогресс – поступательное, взаимосвязанное и взаимообусловленное развитие науки и техники; обусловлен объективными требованиями материального производства и общества в целом, ростом и усложнением человеческих потребностей.

Неразложимая матрица – матрица $A^{n\times n}$, которая одновременной перестановкой строк и столбцов не может быть приведена к виду $\begin{bmatrix} A_1^{k\times k} & A_2^{(n-k)\times k} \\ 0 & A_3^{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$.

Норма амортизации – установленный законодательно или в ином порядке процент от балансовой стоимости основных фондов, списываемый ежегодно на себестоимость продукции.

Норма обязательных резервов (норма резервирования) – установленная законодательно доля средств коммерческих банков и других кредитных учреждений, которую они обязаны хранить на депозитах в центральном банке страны; резервные средства, образуя резервные фонды, используются центральным банком для регулирования деятельности коммерческих банков.

Объем производства – разнообразные товары и услуги, произведенные с помощью факторов производства, потребляемые потребителями либо используемые для производства других товаров и услуг.

Однородная функция. Функция $f(x_1,...,x_n)$ – однородная степени r относительно аргументов $x_1,....,x_n$, если $f(\alpha x_1,...,\alpha x_n) \equiv \alpha^r f(x_1,...,x_n)$. Если $f(x_1,...,x_n)$ непрерывно дифференцируемая однородная функция степени r, то для нее справедлива теорема Эйлера: $x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = rf(x_1,...,x_n)$.

Оптимальность по Парето (эффективность по Парето) – такое состояние системы, при котором значение ни одного из частных критериев, описывающих состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения значения какого-либо другого. Более строго, пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – множество состояний системы, оцениваемые векторным критерием $f: X \to Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}^k$. Тогда элемент x является оптимальными по Парето в X, если не существует такого $x' \in X$, $x' \neq x$, что $f_i(x') \geq f_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, и найдется j, для которого $f_j(x') > f_j(x)$. Множество состояний системы, эффективных по Парето, называют множеством Парето.

Основной макроэкономический баланс (основное макроэкономическое тождество, тождество дохода) – отражает равенство доходов и расходов (произведенного ВВП и расходов всех экономических агентов), **ВВП=*Y*=*C*+*I*+*G*+*NX***, где **C** – личные потребительские расходы, I – валовые частные внутренние инвестиции, G – государственные закупки товаров и услуг, NX – чистый экспорт (разность стоимостных объемов экспорта и импорта).

Основные производственные фонды – основные фонды, использующиеся для производства продуктов или оказания материальных услуг (услуги транспорта, связи, торговли и так далее).

Основные фонды – часть национального имущества, созданная общественным трудом, находящаяся в различных формах собственности, которая длительное время неоднократно или постоянно в неизменной натурально-вещественной форме используется в экономике, постепенно перенося свою стоимость на создаваемые продукты и услуги.

Отношение предпочтения – бинарное отношение, использующееся для формализации понятия предпочтения.

Платежный баланс – соотношение платежей, поступивших в данную страну из-за границы, и платежей, произведенных ею за границей в течение определенного периода времени. Включает платежи по внешнеторговым операциям (торговый баланс), услугам (международные перевозки, страхование и пр.), неторговым операциям (содержание представительств, командирование специалистов, международный туризм), а также платежи в виде процентов по кредитам и в виде доходов от капиталовложений и движение капиталов (инвестиций и кредитов).

Полунепрерывность сверху – отображение $\varphi: X \to 2^Y$ называется полунепрерывным сверху, если из того, что $x_k \to x_0$, $x_k \in X$, $y_k \in \varphi(x_k)$, $y_k \to y_0$, следует $y_0 \in \varphi(x_0)$.

Принцип (гипотеза) рационального поведения – способ выбора решений, основанный на стремлении получить наибольший экономический результат с минимально возможными затратами всех необходимых ресурсов.

Приростной показатель – характеризует прирост, изменение значения экономической величины за определенный период времени.

Фондоемкость – показатель, рассчитанный как стоимость основных средств, деленная на годовой выпуск продукции с помощью этих средств. Показатель обратный фондоотдаче.

Продукт – 1) товар, производимый в рассматриваемой экономической системе; 2) результат человеческого труда, хозяйственной деятельности, представленный в материально-вещественной форме (материальный продукт), в духовной, информационной форме (интеллектуальный продукт) либо в виде выполненных работ и услуг.

Производительность труда – эффективность конкретного труда, измеряется количеством изделий, операций, созданных или совершенных в единицу времени, или величиной времени, затрачиваемого на единицу продукта труда.

Производственная мощность – максимально возможный выпуск продукции (за год, сутки, смену) или объем добычи и переработки сырья в номенклатуре и ассортименте, предусмотренных планом, при полном использовании в соответствии с установленным режимом работы производственного оборудования и производственных площадей и с учетом мероприятий по внедрению передовой технологии производства и организации труда.

Производственная функция – соотношение, связывающее переменные величины затрат (ресурсов) с величиной производства продукции (выпуска).

Производственные затраты – затраты, непосредственным образом связанные с производством продукции.

Ресурсы – 1) фундаментальное понятие экономической теории, означающее в общем источники, средства обеспечения производства; 2) товары, не производимые в рассматриваемой экономической системе.

Рыночное равновесие – равенство спроса и предложения на определенный товар в данное время и на данном рынке.

Связное множество – множество, которое нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого.

Федеральная резервная система (ФРС) США – 12 федеральных резервных банков, выполняющих в своей совокупности функции Центрального банка США, и частные коммерческие банки – члены ФРС. Учреждена Федеральным резервным актом (законом) в 1913 г., начала функционировать в 1914 г. Федеральные резервные банки осуществляют банкнотную эмиссию, кассовое обслуживание федерального бюджета, куплю-продажу правительственных ценных бумаг, установление учетной ставки процента, установление величины обязательного резервирования в ФРС средств коммерческих банков, регулирование и административный надзор за деятельностью банков-членов и других банков, контроль за соблюдением закона о холдинг-компаниях и ряда других законов в банковской сфере, за некоторыми операциями банков-членов за рубежом, выступают в роли банкира правительства.

Системный анализ развивающейся экономики – современное направление исследования экономических систем, являющееся синтезом методологии математического моделирования сложных систем с достижениями современной экономической теории.

Совершенная конкуренция – ситуация, в которой никакое искусственное ограничение не препятствует факторам производства, стремящимся получить максимальное вознаграждение за свой труд, переходить от одного хозяйствующего субъекта к другому; никакая отдельная единица, выступающая в качестве покупателя или продавца, не может своим собственным действием повлиять на цену покупаемого или продаваемого товара.

Текущие затраты – 1) денежные затраты на товары и услуги для повседневного пользования, потребления, отражаемые на текущих счетах; 2) затраты трудовых, материальных и финансовых ресурсов предприятия, связанные с текущей хозяйственной деятельностью, полностью возмещаемые в течение одного производственно-коммерческого цикла в составе цены продукции.

Теория игр – математический метод изучения оптимальных стратегий поведения в играх. Под игрой понимается процесс или ситуация, в которой участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует собственную стратегию, разработанную с учетом представлений этой стороны о других участниках, их ресурсах и их возможных стратегиях.

Теория принятия решений – междисциплинарная область исследования, представляющая интерес для практиков и связанная с математикой, статистикой, экономикой, философией, менеджментом и психологией; изучает, как реальные лица, принимающие решение, выбирают решения и насколько оптимальные решения могут быть приняты.

Технологические (внутренние) ограничения – описывают доступные экономическому агенту известные способы преобразования продуктов и ресурсов.

Технологическое множество – множество всевозможных комбинаций затрат и выпусков, соответствующее некоторой технологии производства.

Товар – 1) любой продукт производственно-экономической деятельности в материально-вещественной форме; 2) объект куплипродажи, рыночных отношений между продавцами и покупателями.

Торговый баланс – отражает движение экспорта и импорта товаров между данной страной и другими государствами, учитывает фактические платежи между страной и другими государствами, составляется на месяц, квартал и год..

Трудоемкость – затраты труда на производство единицы продукции.

Учетная ставка – ставка процента, под который центральный банк предоставляет кредиты коммерческим банкам.

Факторы производства – элементы, необходимые для выпуска продукции (товаров и услуг); делятся на средства производства (машины, инструмент, здания, земля), материалы (сырье, вспомогательные и производственные материалы) и труд в смысле целенаправленной деятельности.

Феноменология – термин, используемый в естествознании, в особенности в физике, для обозначения совокупности знаний, определяющих взаимосвязь между различными наблюдениями явлений (феноменов) в соответствии с фундаментальной теорией, но непосредственно из этой теории не следующих. Феноменология является посредником между экспериментом и теорией. Она более абстрактна и многошагова в своей логике, чем эксперимент, но больше привязана к эксперименту, чем к теории. Границы между теорией и феноменологией размыты и в некоторой степени зависят от уровня понимания и интуиции исследователя.

Фондовооруженность (труда) – показатель, характеризующий оснащенность работников предприятий или отраслей сферы материального производства основными производственными фондами.

Функция полезности – функция $u(x)$, $x \in X$, соответствующая отношению предпочтения $\succeq$, такая, что $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$, $x, y \in X$.

Функция спроса – соотношение, учитывающее все влияющие на спрос факторы (цены всех доступных товаров, величину дохода, вкусовые предпочтения).

Центральный банк (ЦБ) – государственное кредитное учреждение, наделенное правом выпуска банкнот, регулирования денежного обращения, кредита и валютного курса, хранения официального золотовалютного резерва. Является «банком банков», агентом правительства при обслуживании государственного бюджета.

Цена – фундаментальная экономическая категория, означающая количество денег, за которое продавец согласен продать, а покупатель готов купить единицу товара. Цена определенного количества товара составляет его стоимость, поэтому правомерно говорить о цене как денежной стоимости единицы товара. В случае, когда единица данного товара обменивается на определенное количество другого товара, количество становится товарной ценой данного товара.

Чистая отрасль – отрасль, выпускающая один вид продукции.

Чистый выпуск – характеризует результат деятельности предприятия или отрасли в сфере материального производства, отражает лишь вновь созданную стоимость.

Экономика – 1) народное хозяйство, включающее отрасли материального производства и непроизводственной сферы; 2) научная дисциплина, занимающаяся изучением секторов (промышленность, сельское хозяйство, услуги) и отраслей хозяйства страны или отдельных ее регионов, а также некоторых условий и элементов производства.

Экономико-математическая модель – описание экономических процессов, объектов, связей с использованием математического аппарата, прежде всего математических уравнений, соотношений.

Экономическая теория – совокупность научных взглядов на экономические системы, экономическое развитие и экономические законы и закономерности. Исследует наиболее общие существенные связи, причинные зависимости, внутренне присущие экономическим процессам развития экономики. Изучает развитие способа производства и распределения, направления использования результатов труда, отношения собственности.

Экономические отношения – 1) отношения между людьми, связанные с организационными процессами в общественном производстве: разделение и кооперация труда, концентрация и централизация производства, изменение профиля производства и т.п.; эти формы экономических отношений называются организационно-экономическими отношениями, существуют они независимо от того или иного социально-экономического строя общества; 2) социально-экономические отношения – отношения между людьми, связанные с определенным типом (формой) собственности на средства производства.

Экономический агент – типизированный субъект экономики, интересы и информированность которого соответствуют исполняемой им роли.

Экономические блага – все, что способно удовлетворить жизненные потребности людей, приносить людям пользу, доставлять удовольствие.

Экспорт – вывоз за границу товаров, проданных иностранному покупателю или предназначенных для продажи на иностранном рынке.

Эластичность замещения – соотношение затрат замещающих друг друга факторов производства при неизменном объеме выпуска продукции. Определяет, на какую величину надо увеличить затраты одного фактора при снижении затрат другого на единицу.

Эмиссия – выпуск в обращение денежных знаков во всех формах и ценных бумаг.

Эмитент – государство, предприятие, учреждение, организация, выпускающие в обращение денежные знаки, ценные бумаги, платежно-расчетные документы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
3. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
4. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
5. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.
6. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.
7. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1976.
8. *Гуриев С.М.* Модель формирования сбережений и спроса на деньги. Математическое моделирование, 1992, 4 (4), 22-46.
9. *Гуриев С.М., Поспелов И.Г., Шапошник Д.В.* Модель общего экономического равновесия при наличии транзакционных издержек, бартера и неплатежей, I, II. Экономика и математические методы, 2000, вып.1, с.31-46, вып. 2, с.38-52.
10. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. М.: Наука, 1979.
11. *Ильин А.В., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. М.: Издательство МГУ, 1985.
12. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
13. *Комаров С.И., Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова Л.Я.* Представление знаний, содержащихся в математических моделях экономики. Теория и системы управления, 1995, № 5.
14. *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Сов. радио, 1972.
15. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.
16. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Конспект лекций по теории и методам многокритериальной оптимизации. М.: МГУ, 2006.
17. *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1975.

18. *Макконнелл К. Р., Брю С. Л.* Экономикс: принципы, проблемы и политика. М.: ИНФРА-М, 2006.
19. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу.- М.:Наука, 1973.
20. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972.
21. *Морозов В.В.* Основы теории игр. М.: Издательство МГУ, 2002.
22. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.
23. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
24. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1971.
25. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
26. *Петров А.А., Краснощеков П.С.* Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2003.
27. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
28. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* От Госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. – Lewiston, NY: The Edvin Mellen Press, 1999.
29. *Петров А.А., Шананин А.А.* Об одной модели потребления продуктов текущего и длительного пользования. М.: ВЦ РАН, 1997.
30. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
31. *Поспелов И.Г.* Модели экономического роста и динамика ресурсов. Учебное пособие. М.: Издательство МФТИ, 2007.
32. *Поспелов И.Г.* Моделирование экономических структур. М: Фазис, 2003.
33. *Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А., Шипулина Г.Е.* Новые принципы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.:ВЦ РАН, 2006.
34. *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Анализ торговой статистики Нидерландов 1951-1977 гг. с помощью обобщенного непараметрического метода. М.: ВЦ РАН, 1998.

35. *Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщенный непараметрический метод. Математическое моделирование, 1998. т.10, № 4. с.105-116.
36. *Самуэльсон П.* Экономикс. М.: Прогресс, 1994.
37. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В.,, Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
38. *Тер-Крикоров А.М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
39. *Шананин А.А.* Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
40. *Шананин А.А.* Об условиях существования агрегированных функций спроса. Доклады РАН, т.9, №9, с. 117-127, 1997.
41. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
42. *Arrow K.L., Debreu G.* Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica, 22, p. 265-290, 1954.
43. *Gale D.* The law of supply and demand. Math Scand., 1955, 3, p.155-169.
44. *Johansen L.* Production Function. Amsterdam, L.: North-Holland Publ. Co., 1972. 274p.
45. *McKenzie L.W.* Turnpike theory. Econometrica, 1976, 44, 5, p.841-865.
46. *Ramsay F.P.* A mathematical theory of savings. Economic J., 1928, 38, p. 543-559.